§ 7 Anwendungen in der Zahlentheorie

Frage: Wieviele Primzahlen gibt es?

Sinnvollere Frage: Gegeben $x \in \mathbb{R}$, betrachte die Funktion

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \mapsto \#\,\text{Primzahlen} \leq x$$

Wie entwickelt sich die Funktion π asymptotisch?

Wächst die Zahl linear? $\left(= \; \pi(x)/x \overset{x \to \infty}{\sim} \text{const} \right)$

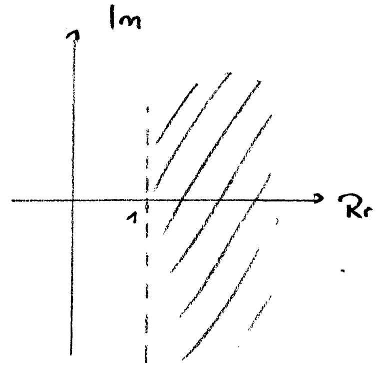
Antwort: (Primzahlsatz) Es ist $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \cdot \log(x)}{x} = 1$.

Interpretation der Antwort: Sei x sehr groß. Dann ist $\pi(x)$ ungefähr gleich $x/\log(x)$. Gegeben eine Zufallszahl $\leq x$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zufallszahl prim ist, in etwa $1/\log(x)$

Anmerkung: Die Konvergenz $\dfrac{\pi(x) \cdot \log(x)}{x} \to 1$ ist unglaublich langsam.

Zentraler Spieler / Held unserer Vorlesung: Die Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta: U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$



wobei $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1 \}$.

Beachte: ① Das ist keine Potenzreihe. Die Zahl z steht im Exponenten!

② Was bedeutet k^z? Wir wissen, was $e^z = \exp(z)$ bedeutet. Dann ist $k^z = \exp(z \cdot \log k)$ wobei $\log k$ der gewöhnliche Logarithmus der positiven reellen Zahl k ist.

③ Die Darstellung heisst Dirichlet-Reihe.

④ Analysis-Vorlesung: Für alle $z \in U$: die Reihe konvergiert absolut.

Besser: gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, dann konvergiert die Reihe auf der Menge $U_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Re}(z) \geq \alpha \}$ gleichmäßig.

Insbesondere: Die Reihe konvergiert auf U kompakt.

Konsequenz: Die Grenzfunktion ζ ist holomorph.

⑤ Erinnerung: Die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{k}$ konvergiert nicht!

Frage: Wir wollen einen Satz über Primzahlen.
Was hat das mit der Riemann ζ-Funktion zu tun?

Antwort Bezeichne mit $p_1, p_2, \dots$ die Menge der Primzahlen (nach Größe sortiert). Für jedes $z \in U$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^z}\right)^{-1} \qquad (*)$$

konvergiert gegen $\zeta(z)$. („Produktentwicklung der ζ-Funktion")

Zusätzlich: Die Funktionenfolge $(*)$ konvergiert auf U kompakt.

Die Konvergenz und Grenzfunktion ist unabhängig von der Reihenfolge

Präzise: Ist $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann konvergiert auch

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_{\sigma(i)}^z}\right)$$ kompakt gegen ζ.

Die Antwort wirft zwei weitere Fragen auf

- Wieso konvergiert $(*)$ überhaupt (und dann noch unabhängig von Reihenfolge, kompakt, ...)
- Wenn Konvergenz vorliegt, wo ist der Zusammenhang zur ζ-Funktion?

Die folgende Satz beantwortet die erste Frage:

<u>Satz</u> Es sei X eine Menge und es sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, sodass die folgende Folge,

$$\sum_{i=1}^{n} | f_i - 1 |$$

gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert.

Dann konvergiert auch die Funktionenfolge

$$\prod_{i=1}^{n} f_i$$

gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f.

<u>Zusätzlich:</u> $\forall x \in X: \quad f(x) = 0 \iff \exists\, i: \; f_i(x) = 0$

<u>Zusätzlich:</u> Die Produkte konvergieren unabhängig von Reihenfolge.

<u>Beweis des Satzes:</u>

Ich möchte $\sum \log f_n$ betrachten.

Dazu sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$ die geschlitzte Ebene. Dort existiert log als holomorphe Funktion.

Gegeben $x \in X$, dann konv. $\sum |f_n(x) - 1|$. Also konvergiert $f_n(x)$ gegen 1. Also liegen für alle ausreichend großen $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen $f_n(x)$ in Ω. Besser: $\sum |f_n - 1|$ konvergiert glm.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: \forall x \in X: \quad f_n(x) \in \Omega$

Damit ist zumindest der Ausdruck $\sum_{n>N} \log f_n$ sinnvoll.

Fragt sich aber, ob der Ausdruck konvergiert.

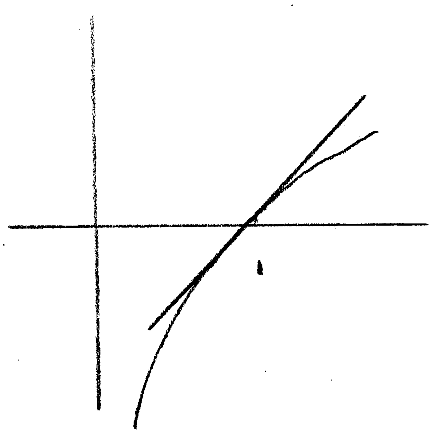
Elementare Analysis Für z nahe an 1 ist $|\log z| \leq \text{const}^+ \cdot |z-1|$

[$\exists$ const. $\exists\ \delta < 1: \forall z \in B_\delta(1): \ |\log z| < \text{const}^+ \cdot |z-1|$]

Also: weil $\sum |f_n - 1|$ glm. gegen beschränkte Grenzfunktion konvergiert

konvergiert $\sum_{n>N} \log f_n$

glm. gegen Betragsmäßig besch. Grenzfunktion L



Wir wissen: exp ist auf jedem Kompaktum gleichmäßig stetig,
also insbesondere auf Umgebung der 1 (in der alle Bilder von f_n, $n > N$ liegen)

<u>Konsequenz:</u>

$$\underbrace{\exp \sum_{n>N} \log f_n}_{= \prod_{n>N} f_n} \xrightarrow{glm} \exp L$$

hat keine Nullstellen.

Demnach

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} f_n \longrightarrow \left(\prod_{n=1}^{N} f_n \right) \cdot \exp L \qquad (*)$$

Der Annahme („$\sum |f_n - 1|$ konv. gegen <u>beschränkte</u> Funktion") stellt sicher, alle f_n sind beschränkt, und ebenso $\prod_{n=1}^{N} f_n$

Daher ist die Konvergenz von (*) gleichmäßig.

Für die Zusatzbehauptungen bin ich zu faul. □

Anwendung des Satzes auf die Produktdarstellung von ζ:

Wir betrachten die Funktionen $f_n : \cancel{z}\, U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto 1 - \frac{1}{p_n^z}$.

Dann ist klar: $|f_n - 1| = \frac{1}{p_n^z}$ und $\sum |f_n - 1| = \sum \left| \frac{1}{p_n^z} \right|$

konvergiert kompakt. Also konvergiert

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p_n^z} \right)$$ kompakt ~~und~~ unabhängig von der Reihenfolge.

Die Abbildung $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \; z \mapsto z^{-1}$ ist lokal glm. stetig.

Also konvergiert $\prod \left(1 - \frac{1}{p_n^z} \right)^{-1}$ kompakt und unabh. von der Reihenfolge.

, kommt die Verbindung zur ζ-Funktion zustande?

Sei $z \in U$ gegeben. Dann ist für eine gegebene Primzahl p

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{(p^2)^z} + \frac{1}{(p^3)^z} + \dots$$

Man brachte die Folge $1, p, p^2, p^3 \dots$

② Seien p, q zwei Primzahlen

$$\left(\frac{1}{1-1/p^z}\right)\left(\frac{1}{1-1/q^z}\right) = \sum_{a,b} \frac{1}{(p^a \cdot q^b)^z}$$

alle Zahlen, deren Primfaktorzerlegung nur p und q enthält

③ E_n = Liste der ersten n Primzahlen

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{1}{k^z}$$

wobei $\mathcal{X}_n$ die Zahlen sind, in deren Primfaktorzerlegung nur $p_1, \dots, p_n$ vorkommt

$\rightsquigarrow$ Analysis: rechte Seite konvergiert gegen $\zeta(z)$.