Funktionentheorie: Vorlesung am 18.05.2022

Letztes Mal: $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ homotope Wege ($\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ & $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$) und $f \in \mathcal{O}(U)$, dann $\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$.

Insbesondere: γ geschlossen und zusammenziehbar, dann $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.
(Cauchy-Integralsatz)

Wir wissen: $f \in \mathcal{O}(U)$ hat eine Stammfunktion, wenn $\int_\gamma f(z)\, dz$ nur von Start- und Endpunkt von γ abhängt. Im Beweis dieser Aussage wurde die Voraussetzung aber nur für geschlossene Wege verwendet.

Fazit: $f \in \mathcal{O}(U)$ hat eine Stammfunktion, wenn $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in U gilt.

Folgerung: Ist $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(U)$, so besitzt f auf U eine Stammfunktion.

Beweis: Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ geschlossen. Müssen zeigen, dass $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

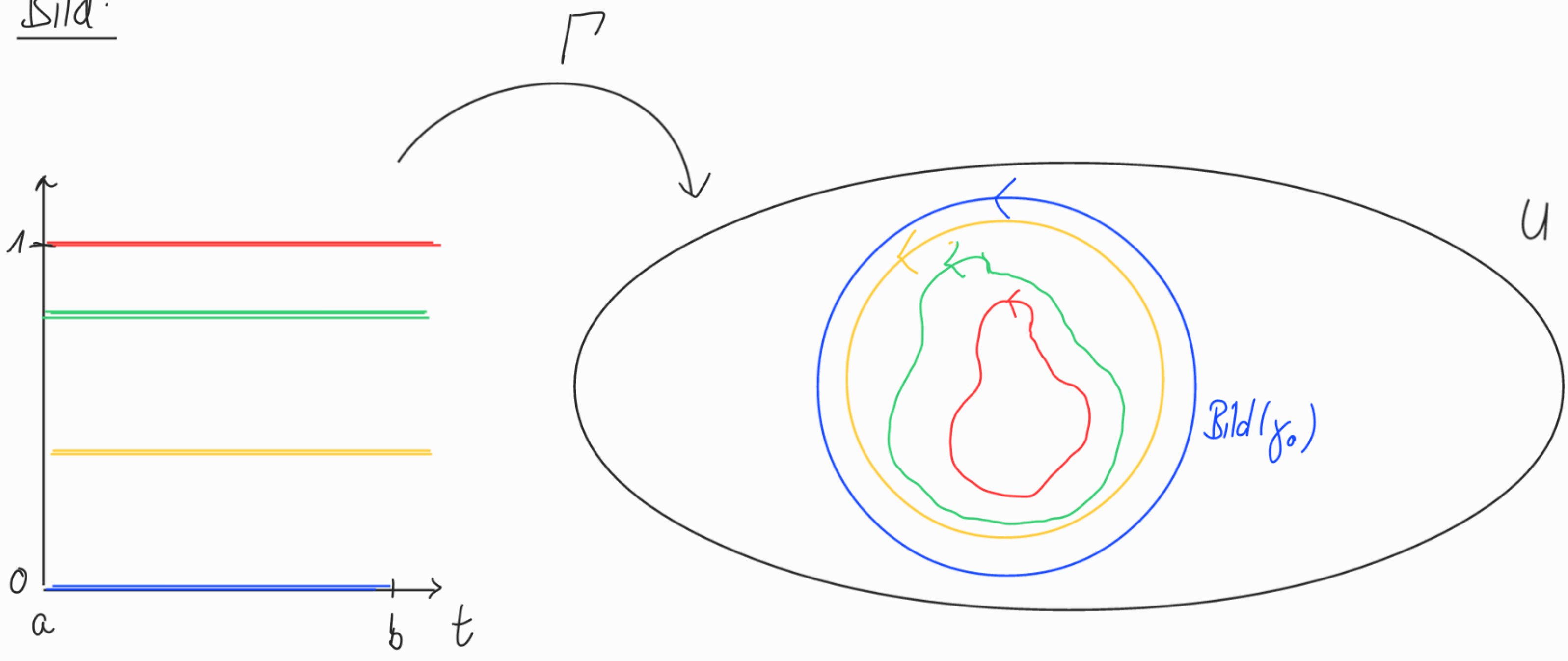
U ist einfach zshgd. $\Longrightarrow$ γ ist zusammenziehbar.

Cauchy-Integralsatz $\Longrightarrow$ Beh. $\square$

Def.: Sei X ein top. Raum. Zwei geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow X$ heißen <u>frei homotop</u> (oder <u>homotop als geschlossene Wege</u>), wenn es eine stetige Abb. $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow X$ gibt, s.d.

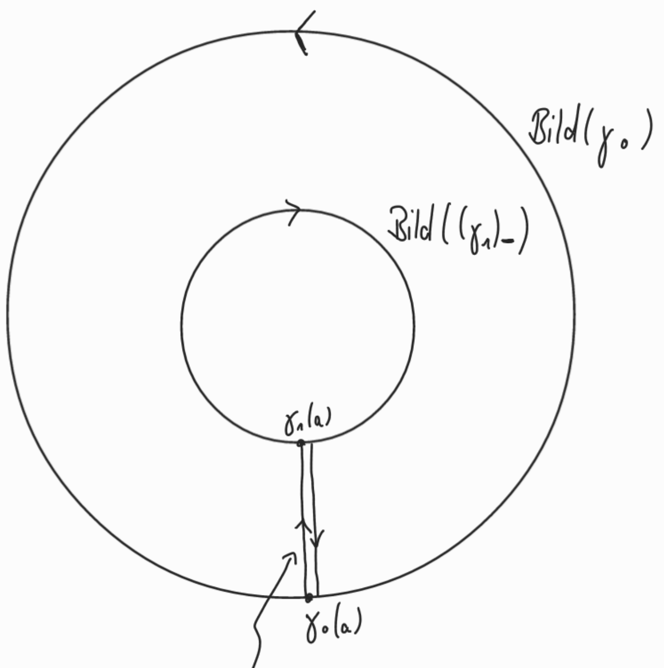
- $\forall t \in [a,b]$: $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$
- $\forall s \in [0,1]$ ist $\Gamma(a,s) = \Gamma(b,s)$.

Bild:



Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ frei homotope geschlossene Wege. Dann gilt $\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$.

Beweis: Sei Γ freie Homotopie zwischen γ_0, γ_1.



Weg $\delta : s \longmapsto \Gamma(a, s)$

Die Wege γ_0 und $\delta_- \gamma_1 \delta$ haben denselben Anfangs- & Endpunkt.

Definiere eine „normale" Homotopie $H(\cdot, u)$ zwischen γ_0 und $\delta_- \gamma_1 \delta$ wie folgt:

- Folge dem Weg $\delta|_{[0,u]}$
- Gehe den Weg $\Gamma(t, u)$ ab
- Gehe δ wieder zurück

Homotopieinvarianz $\Longrightarrow$ $\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\delta_- \gamma_1 \delta} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$ $\square$

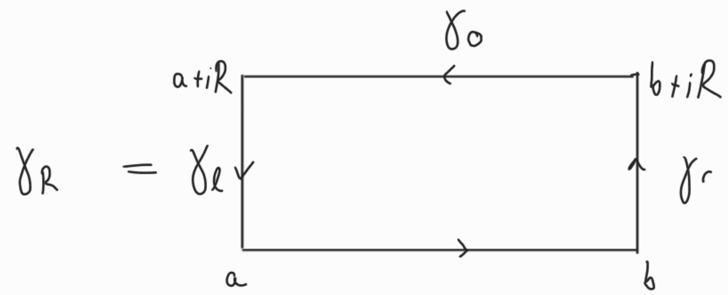
Anwendung: Berechnung reeller Integrale

Wollen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$ nachweisen.

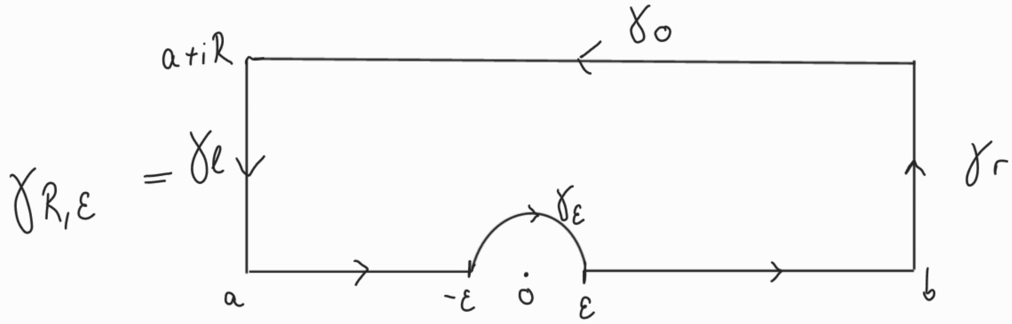
Beobachtung: $\displaystyle\frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im}\left(f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(z)\right) \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$

Seien $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a < b$. Betrachte für $R > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ folgenden Wege:

- Falls $a > 0$ oder $b < 0$:



- Falls $0 < a < b$:



$\rightsquigarrow$ γ_R, $\gamma_{R,\varepsilon}$ in $\mathbb{C}^*$ zusammenziehbar $\Longrightarrow \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$

Parametrisierungen von $\gamma_r, \gamma_o, \gamma_l$:

$\gamma_r : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \gamma_r(t) = b + it$

$\gamma_o : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \gamma_o(t) = (1-t)b + ta + iR$

$\gamma_l : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \gamma_l(t) = a + (R-t)i$

Es gilt:

- $$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \right| = \left| \int_0^R \frac{e^{i(b+it)}}{b+it} \cdot i \, dt \right|$$
$$\leq \int_0^R \frac{e^{-t}}{|b|} \, dt \leq \frac{1}{|b|}$$

- Analog: $$\left| \int_{\gamma_l} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \right| \leq \frac{1}{|a|}$$

- $$\left| \int_{\gamma_o} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{i\cdot[(1-t)b+ta]-R}}{(1-t)b+ta+iR} \cdot (a-b) \right| dt$$
$$= (b-a) \cdot \int_0^1 \frac{e^{-R}}{|(1-t)b+ta+iR|} \, dt$$
$$\leq (b-a) \frac{e^{-R}}{R}$$

Wir zeigen, dass $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx$ und $\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx$ existieren:

- Für $a > 0$ und $b = R$: $\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

$$\left| \int_a^R \frac{e^{ix}}{x} \, dx \right| = \left| -\int_{\gamma_r} - \int_{\gamma_o} - \int_{\gamma_l} \right|$$
$$\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{|R|} + (R-a)\frac{e^{-R}}{R} \xrightarrow{R \to \infty} \frac{1}{a}.$$

$$\rightsquigarrow \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} \, dx = \int_0^a + \int_a^\infty \quad \text{existiert.}$$

existiert, da $\frac{\sin x}{x}$ auf $(0,a]$ beschränkt

existiert! (Cauchy-Kriterium.)

- Analog existiert $\int_{-R}^{b} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$ für $b < 0$.

<u>Jetzt zur Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$:</u>

Für $\varepsilon > 0$ gilt, da $\int_{\gamma_r}, \int_{\gamma_o}, \int_{\gamma_\ell} \xrightarrow{R \to \infty} 0$:

$$0 = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dz + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\pi i.} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi. \qquad \square$$