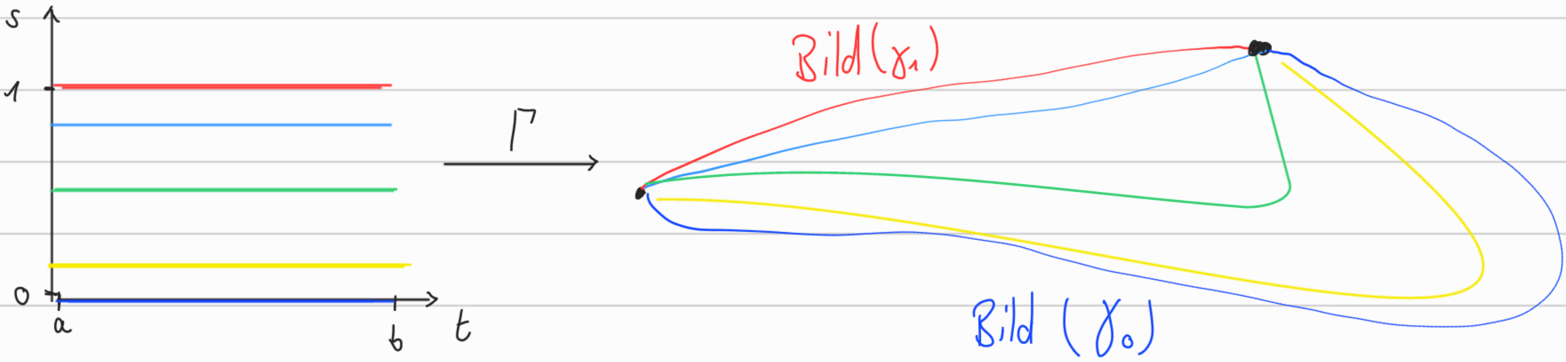
Funktionentheorie: Vorlesung, (Freitag, den) 13.05.2022

Erinnerung: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ stetige Wege in U mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.
Dann heißen γ_0, γ_1 homotop in U, wenn es eine stetige Abb.

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$$

mit
- $\forall s \in [0,1]$: $\Gamma(a,s) = \gamma_0(a)$, $\Gamma(b,s) = \gamma_0(b)$
- $\forall t \in [a,b]$: $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

gibt.



Ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ heißt zusammenziehbar, falls γ homotop zum konstanten Weg $\gamma(a)$ ist.

Integralsatz von Cauchy: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ zusammenziehbar. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beispiel: Sei $U = \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f \in \mathcal{O}(U)$ durch $z \longmapsto \frac{1}{z}$ definiert.

Vermutung: Der Weg $\gamma =$  ist in U nicht zusammenziehbar.

Nachweis mit Cauchy Integralsatz: γ ist parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow U, \qquad \gamma(t) = e^{it}.$$

Berechne

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i \cdot e^{it} \, dt = \int_0^{2\pi} i \, dt = 2\pi i \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ γ in U nicht zusammenziehbar!

$\Longrightarrow$ f hat keine Stammfkt. auf U!

Bemerkung / Ausblick: Der Residuensatz beantwortet die Frage, was bei $\int_\gamma f(z) dz$ herauskommt, wenn γ nicht notwendig zusammenziehbar ist.

Wie beweist man den Integralsatz von Cauchy?

Da zusammenziehbare Wege homotop zu konstanten Wegen sind, ist er ein Spezialfall von:

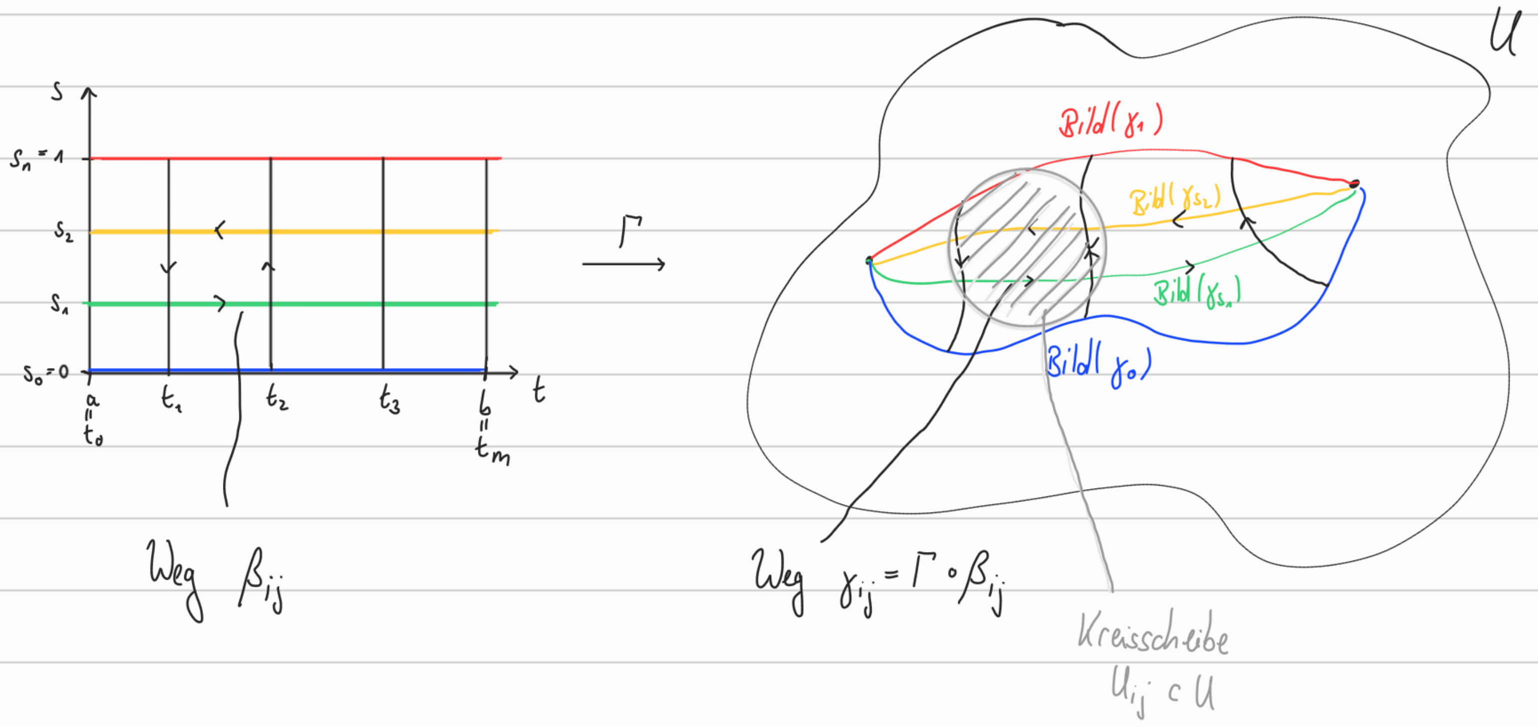
Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ homotop. Dann gilt $\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$.

Beweisidee modulo technische Schwierigkeiten:

Sei $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ Homotopie zwischen γ_0, γ_1.

Wähle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ von $[a,b]$

$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1$ von $[0,1]$



Kann die Unterteilung so fein wählen, dass Bild(γ_{ij}) in einer in U enthaltenen Kreisscheibe U_{ij} (in der Skizze grau) enthalten ist.

Wir wissen: γ_{ij} geschlossen und $\int_{\gamma_{ij}} f(z)\, dz = 0$, da $f|_{U_{ij}}$ eine Stammfkt. hat!

$$\Longrightarrow \quad 0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{ij}} f(z)\, dz = \int_{\gamma_{s_{i-1}}} f(z)\, dz - \int_{\gamma_{s_i}} f(z)\, dz$$

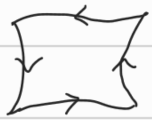
für $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \qquad „\square“$$

<u>Probleme im Beweis:</u>

- Warum kann man die Unterteilungen so fein wählen, s.d. $\mathrm{Bild}(\gamma_{ij}) \subset$ Kreisscheibe $\subset U$?

<u>Antwort:</u> Überdecke U mit offenen Kreisscheiben U_i.
$\Longrightarrow [0,1]^2 = \bigcup_i \Gamma^{-1}(U_i)$
$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ („Lebesgue-Zahl“) s.d. jedes $A \subset [0,1]^2$ mit Durchmesser $< \delta$ in einem $\Gamma^{-1}(U_i)$ enthalten ist.

- <u>Größeres Problem:</u> Die Wege $\gamma_{ij} =$  müssen nicht stückweise stetig diff'bar sein, selbst wenn γ_0, γ_1 es sind.
  $\rightsquigarrow$ müssen Integration holomorpher Fkt.en über beliebige stetige Wege einführen!

<u>Idee zur Definition:</u> Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ stetig.

Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Unterteilung, s.d. $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ in einer offenen Kreisscheibe $U_j \subset U$ enthalten ist.

(Das ist möglich.)

Nun hat f auf jedem U_j eine Stammfunktion F_j. (f hol.!!!)

essentiell.

Def.: $$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{j=0}^{m-1} F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1})).$$

Hängt nicht von der Unterteilung und von der Wahl von F_j ab. (Das sieht man, indem man eine gemeinsame Verfeinerung wählt.)

Wir wissen: • Ist γ stückweise $\mathcal{C}^1$ und besitzt f auf U eine Stammfkt. F, dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

$\rightsquigarrow$ Integral über stückweise $\mathcal{C}^1$-Wege stimmt mit dem über allgemeine Wege überein.

• Ist γ_- der „rückwärts durchlaufene" Weg γ, so gilt

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(Ist $a = t_0 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung bzgl. γ, so betrachte $a = a+b-t_m < a+b-t_{m-1} < \dots < a+b-t_0 = b$ und bemerke, dass $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$ gilt.)

Diese Diskussion liefert insgesamt den Beweis des Integralsatzes! $\square$