Wiederholung: Für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Riemannsche ζ-Funktion

Heute:
- Fortsetzbarkeit von ζ
- ζ hat keine Nst. für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$

Fortsetzbarkeit von ζ:

Wissen: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$, aber sicher nicht für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

Möchten ζ aber für $\mathrm{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$ holom. fortsetzen.

Bsp. für holomorphe Fortsetzung: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

konvergiert nur für $|z| < 1$. Jedoch besitzt sie eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, nämlich $\frac{1}{1-z}$.

Satz: $\zeta(s) - \frac{s}{s-1}$ besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf $\{s \mid Re(s) > 0\}$.
Insbesondere besitzt $\zeta(s)$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\{s \mid Re(s) > 0,\ s \neq 1\}$ und hat in 1 einen Pol 1. Ordnung mit $Res_1(\zeta) = 1$.

Notation: Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$
„Abrundungs-/Floor-Funktion"

Insbesondere gilt $|x - \lfloor x \rfloor| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis des Satzes:

Für $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - (n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^s} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}}_{\text{kein Beitrag für } n=0} n \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}} \, dx$$

$$= s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, dx \qquad \left[\text{für } x \in [n, n+1) \text{ ist } \lfloor x \rfloor = n\right]$$

$$= s \cdot \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, dx.$$

Nun gilt: $$s \cdot \int_1^\infty \frac{x}{x^{s+1}}\, dx = \frac{s}{s-1},$$

also

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \cdot \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}}\, dx.$$

Es genügt also z.z., dass $\int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}}\, dx$ für $Re(s) > 0$ kompakt konvergiert. Das folgt aus

$$\left| \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{s+1}}\, dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{|\lfloor x \rfloor - x|}{x^{Re(s)+1}}\, dx$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{Re(s)+1}}\, dx = \frac{1}{Re(s)}.$$

$\square$

Bemerkungen:

(1) Mit mehr Arbeit lässt sich $\zeta(s)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen: Bezeichnet Γ die Gamma-Funktion, so gilt

Wird für die Fortsetzung genutzt

$$\zeta(s) = 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s).$$

Insbesondere gilt $\zeta(-2k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{<0}$.

„triviale Nullstellen von ζ"

Vorsicht:
- $\Gamma(k) = (k-1)!$, wenn $k \in \mathbb{Z}_{>0}$
- bei $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ hat Γ einfache Pole

(2) Die holomorphe Fortsetzung von ζ auf $\{s \mid Re(s) > 0,\ s \neq 1\}$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist mysteriös!

ζ hat keine Nst. für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$:

Einschub über Faltungen

Sei $\mathcal{A} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \}$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

$f, g \in \mathcal{A} \rightsquigarrow (f * g)(n) := \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$ <u>Faltung</u> von f und g

Summe läuft über alle Teiler $d \geq 1$ von n

<u>Fakt:</u> $(\mathcal{A}, +, *)$ ist kommutativer Ring mit Einselement η definiert durch $\eta(1) = 1$, $\eta(n) = 0 \quad \forall n \geq 2$.
Ist $f \in \mathcal{A}$, so existiert ein $g \in \mathcal{A}$ mit $f * g = \eta$ genau dann, wenn $f(1) \neq 0$.

Warum Faltungen?

Für $f \in \mathcal{A}$ kann man formal eine Dirichlet-Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

definieren.

<u>Beobachtung:</u> Sind F, G Dirichlet-Reihen zu $f, g \in \mathcal{A}$, so gilt

$$F(s) \cdot G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}.$$

<u>Spezialfall mit $f(n) = 1 \ \forall n$:</u> Riemannsche ζ-Funktion.

Sei $\mu \in \mathcal{A}$ mit $f * \mu = \eta$.

$\rightsquigarrow$ μ beschreibt die Dirichlet-Reihe von $\frac{1}{\zeta(s)}$.

<u>Def.:</u> μ heißt die <u>Möbius-Funktion.</u> Sie kann explizit durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{wenn } n \text{ durch ein Primzahlquadrat teilbar ist} \\ (-1)^r, & \text{wenn } n \text{ das Produkt von } r \text{ versch. Primzahlen ist} \end{cases}$$

beschrieben werden. <u>Bsp.:</u> $\mu(4) = 0$, $\mu(12) = 0$, $\mu(6) = 1$, $\mu(30) = -1$.

<u>Für uns ist nur wichtig:</u> μ ist beschränkt!

Schwere Geburt, aber jetzt können wir zeigen:

<u>Lemma:</u> $\zeta(s)$ hat keine Nst. für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

<u>Beweis:</u> Sei $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ und s so, dass $\zeta(s) \neq 0$.

Haben $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma)$.

$\Longrightarrow$ $|\zeta(s)| \geq \frac{1}{\zeta(\sigma)} > 0$ $\Longrightarrow$ Beh.

<u>denn:</u> Ang., $s_0 = \sigma_0 + it_0$, $\sigma_0 > 1$ ist Nst. von ζ.

Dann gilt $\forall s$ mit $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ und $\zeta(s) \neq 0$ die Abschätzung oben. Der Identitätssatz sagt aber, dass die Nst. von ζ, die den Realteil σ_0 haben, diskret sind. Obige Abschätzung hängt aber stetig von s & σ ab. $\lightning$

$\square$

Für $\mathrm{Re}(s)=1$ müssen wir noch etwas arbeiten.

<u>Def.:</u> Definiere die <u>von Mangoldt-Funktion</u> $\Lambda \in \mathcal{A}$ durch

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, & \text{wenn } n = p^k \text{ für } p \text{ prim} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Lemma:</u> $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

<u>Beweis:</u> Haben $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) = (\varepsilon * \Lambda)(n)$ mit $\varepsilon(n) = 1$ $\forall n$.

$$\Longrightarrow \quad -\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon * \Lambda)(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

$\square$

Jetzt zum versprochenen

<u>Satz:</u> $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

<u>Beweis:</u> Nur noch $\mathrm{Re}(s)=1$ ist zu erledigen.

Für s_0 mit $\mathrm{Re}(s_0) = 1$, hat ζ in s_0 höchstens einen Pol.
Man kann also in einer Umgebung von s_0 schreiben:

$$\zeta(s) = (s-s_0)^r \cdot \underbrace{h(s)}_{\substack{\text{holomorph} \\ \text{mit } h(s_0) \neq 0.}}, \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow (s-s_0) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{r \cdot h(s) + (s-s_0) h'(s)}{h(s)} \qquad (*)$$

$$\xrightarrow{s \to s_0} r \quad \left(= \text{bereits aus vorherigen VL bekannt: } \mathrm{Res}_{s_0}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right) = r \right)$$

Schreibe $F(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

$$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(s_0 + \varepsilon) = -r. \qquad (**)$$

Sei nun $s = 1+it$, $t \neq 0$ und $\mu \geq 0$ die Ordnung von ζ in s.

$\rightsquigarrow$ z.z. $\mu = 0$.

$\nu \geq 0$ die Ordnung von ζ in $1+2it$.

$$(**) \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(1+\varepsilon) = 1 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(s+\varepsilon) = -\mu \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(1+2it+\varepsilon) = -\nu \end{cases}$$

<u>Beob.:</u> $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(\bar{s} + \varepsilon) = -\mu$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot F(1-2it+\varepsilon) = -\nu$,

da $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$.

Haben jetzt

$$\varepsilon \sum_{r=-2}^{r} \binom{4}{r+2} F(1+itr+\varepsilon) = \varepsilon \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{r+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+itr+\varepsilon}}$$

$$= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}} \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{r+2} \frac{1}{n^{itr}}$$

$$= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}} \cdot \Big(\underbrace{n^{it/2} + n^{-it/2}}_{\in \mathbb{R}} \Big)^4 \geq 0.$$

Also: Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert

$$-\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad 8\mu \leq 6 - 2\nu \leq 6$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = 0, \quad \text{da} \quad \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

$\square$

Konsequenz:

Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ liegen die Nst. von ζ im Streifen

$$\{ z \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \}$$

Riemannsche Vermutung: Ist s_0 mit $0 < \mathrm{Re}(s_0) < 1$ Nst. von ζ, so gilt $\mathrm{Re}(s_0) = \frac{1}{2}$.