Ziel: Primzahlsatz beweisen.

Satz (Taubersatz von Newman)
Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkt & lokal integrierbar. Die Laplace-Transformierte

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt, \qquad Re(z) > 0$$

sei hol. auf eine offene Umgebung von $Re(z) \geq 0$ fortsetzbar. Dann gilt

$$F(0) = \int_0^\infty f(t)\, dt$$

existiert.

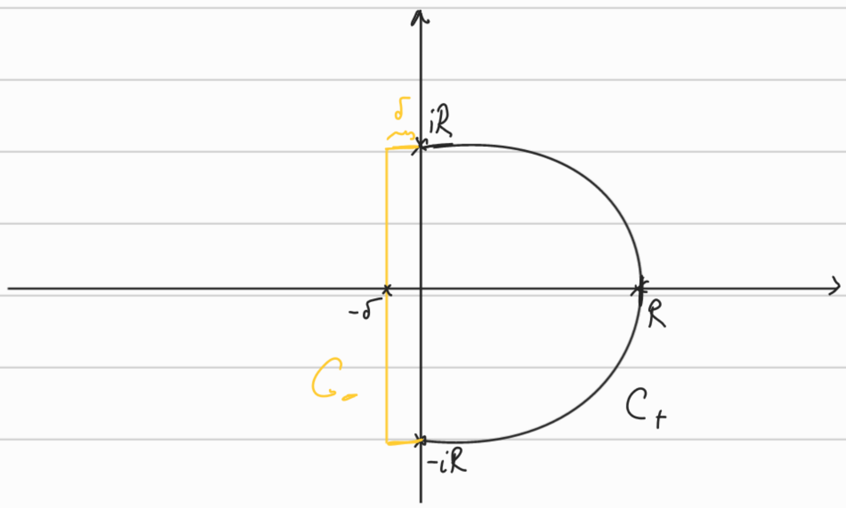
Beweis: Für $T > 0$ ist $F_T(z) = \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt$ hol. auf $\mathbb{C}$.

Ziel: $\lim_{T \to \infty} F_T(0) = F(0)$.

Sei $R > 0$ und $\delta = \delta(R) > 0$ so, dass F auf

$$U := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq R, \quad Re(z) \geq -\delta \}$$

holomorph ist.



Es gilt:

$$\partial U = \{z \in \partial U \mid Re(z) > 0\} \cup \{z \in \partial U \mid Re(z) < 0\} \cup \{iR, -iR\}$$
$$=: \quad C_+ \quad \cup \quad C_- \quad \cup \quad \text{Nullmenge}$$

„Trick von Newman": Nach der Cauchy-Integralformel gilt:

$$(*) \qquad F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \big(F(z) - F_T(z)\big) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$$

f beschränkt $\implies \exists B > 0$ mit $|f(t)| \leq B \quad \forall t \geq 0$.

Für $z \in C_+$ gilt:

$$(1) \qquad |F(z) - F_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \right|$$
$$\leq B \cdot \int_T^\infty |e^{-zt}|\, dt$$
$$= B \cdot \int_T^\infty e^{-Re(z) \cdot t}\, dt$$
$$= B \cdot e^{-Re(z) \cdot T} \cdot Re(z)^{-1}.$$

$$(2) \qquad \left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \cdot \frac{1}{z} \right| = e^{Re(z) \cdot T} \cdot \frac{2 Re(z)}{R^2},$$

da $1 + \frac{z^2}{R^2} = 1 + \frac{z^2}{z\bar{z}}$ auf C_+.

(3) Folgt aus (1), (2):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (F(z) - F_T(z)) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2B}{R^2} \cdot \underbrace{R\pi}_{\text{Länge von } C_+} = \frac{B}{R}.$$

Betrachte nun C_-:

(4) $F_T \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$$\Longrightarrow \int_{C_-} F_T(z) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \overset{\text{Homotopieinvar.}}{=} \int_{C_-'} F_T(z) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

$C_-' := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \quad \mathrm{Re}(z) < 0 \}$

(5) Wie oben: Für $z \in C_-'$ gilt:

$$\left| F_T(z) \right| = \left| \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| \leq B \cdot \frac{e^{-\mathrm{Re}(z) T}}{|\mathrm{Re}(z)|}$$

und

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{\mathrm{Re}(z) T} \cdot \frac{|2 \mathrm{Re}(z)|}{R^2}.$$

(6) Folgt aus (4), (5):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} F_T(z)\, e^{-zT} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{B}{R}.$$

(7) Betrachte nun $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} F(z) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$

unabh. von T

$\mathrm{Re}(z) < 0 \Longrightarrow \lim_{T \to \infty} e^{zT} = 0$ kompakt

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} F(z) \cdot e^{zT} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \longrightarrow 0, \quad T \to \infty.$$

$$\Longrightarrow \limsup_{T\to\infty} |\underbrace{F(0) - F_T(0)}| \overset{(3),(6),(7)}{\leq} \frac{2B}{R}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C (F(z)-F_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_+} + \int_{C_-}\right)$$

$R \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ Beh. □

Wollen den Taubersatz auf

$$F(s) := \frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}, \quad \Phi(s) = \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln p}{p^s}$$

anwenden. Müssen also Φ diskutieren:

<u>Lemma</u>: $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ ist hol. für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

<u>Beweis</u>: Schreibe $F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln(p)}{(p^r)^s}$.

Wissen: $F(s) - \frac{1}{s-1}$ ist hol. auf $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ fortsetzbar.

$\Longrightarrow$ genügt z.z., dass $\underbrace{F(s) - \Phi(s)}_{\substack{\text{ist sogar hol.} \\ \text{auf } \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2} \text{ fortsetzbar}}}$ sich hol. auf $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ fortsetzen lässt

Gilt: $$F(s) - \Phi(s) = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln(p)}{(p^r)^s}.$$

Sei $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ und $C := \frac{2}{2-\sqrt{2}}$.

$$\Longrightarrow \frac{1}{p^{2\sigma} - p^{\sigma}} \leq \frac{C}{p^{2\sigma}}.$$

Gilt nun:

$$\left| F(s) - \Phi(s) \right| \leq \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln p}{(p^r)^{\sigma}}$$

$$= \sum_{p \text{ prim}} \ln(p) \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{(p^{\sigma})^r}$$

$$= \sum_{p \text{ prim}} \ln(p) \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/p^{\sigma}} - 1 - \frac{1}{p^{\sigma}} \right)$$

$$= \sum_{p \text{ prim}} \ln(p) \cdot \frac{1}{p^{2\sigma} - p^{\sigma}}$$

$$\leq C \cdot \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln(p)}{p^{2\sigma}}$$

$$\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{2\sigma}} = - C \cdot \zeta'(2\sigma)$$

hol. auf $\mathrm{Re} > 1$

$\rightsquigarrow$ $\zeta'(2\sigma)$ ok für $\sigma > \frac{1}{2}$. $\square$

Der Primzahlsatz benötigt noch weitere Lemmata:

<u>Lemma:</u> Sei $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{\substack{p \leq x \\ \text{prim}}} \ln(p)$. Dann ist

$$x \longmapsto \frac{\theta(x)}{x} \quad \text{für } x \geq 1$$

beschränkt.

<u>Beweis:</u> Jede Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ teilt $\binom{2n}{n}$.

$$\Longrightarrow e^{\theta(2n) - \theta(n)} = \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}.$$

$$\Longrightarrow \theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \ln(n) \quad (*)$$

Fixiere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, wähle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $2^{m-1} < N \leq 2^m$.

Dann gilt:

$$\theta(N) \leq \theta(2^m) = \theta(2^m) - \theta(2^0) = \sum_{k=1}^{m} \left(\theta(2^k) - \theta(2^{k-1})\right)$$

$$\overset{(*)}{\leq} \ln 2 \left(2^m + 2^{m-1} + \dots + 2\right)$$

$$= 2 \ln 2 \, (2^m - 1)$$

$$\leq 4 \ln 2 \cdot 2^{m-1}$$

$$< 4 \ln 2 \cdot N$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\theta(N)}{N} < 4 \ln 2$$

□

Jetzt spielt der Taubersatz eine Rolle:

<u>Lemma:</u> $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} \, dx$ konvergiert.

<u>Beweis:</u> Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\Phi(s) = \sum_{p \text{ prim}} \frac{\ln p}{p^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\theta(n) - \theta(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \cdot \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \cdot \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}} \, dx$$

$$= s \cdot \int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}} \, dx. \qquad (*)$$

Wissen: $h(u) := \frac{\Theta(u)}{u} - 1$ ist beschränkt und lokal integrierbar.

$$\int_1^\infty h(u) \cdot \frac{du}{u^{s+1}} = \int_0^\infty h(e^t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\parallel$$

$$\int_1^\infty \frac{\Theta(x) - x}{x^{s+2}}\, dx$$

$$\parallel \, (*)$$

$$\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}$$ ist hol. für $Re(s) \geq 0$

Wende Newman an $\Longrightarrow \int_0^\infty h(e^t)\, dt = \int_1^\infty \frac{\Theta(x) - x}{x^2}\, dx$ ex.

$\square$

Kor.: $\lim_{x \to \infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1.$

Beweis: Ang. $\exists \lambda > 1$ mit $\Theta(u) \geq \lambda u$ für u sehr groß.
(Analog schließt man dann $\lambda < 1$ aus.) Dann:

$$\int_u^{\lambda u} \frac{\Theta(x) - x}{x^2} \geq \int_u^{\lambda u} \frac{\lambda u - x}{x^2}\, dx \overset{y = \frac{x}{u}}{=} \underbrace{\int_1^\lambda \frac{\lambda - y}{y^2}\, dy}_{\text{unabh. von } u} > 0$$

Vorheriges Lemma sagt aber: $\int_u^\infty \frac{\Theta(x) - x}{x^2}\, dx \xrightarrow{u \to \infty} 0$ $\lightning$

$\square$

Endlich:

<u>Primzahlsatz:</u> Für $\pi(x) = \#\{p \leq x \text{ prim}\}$ gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1.$

<u>Beweis:</u> Gilt $\theta(x) = \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ \text{prim}}} \ln(p) \leq \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ \text{prim}}} \ln(x) = \pi(x)\ln(x).$ $(*)$

Für $\varepsilon > 0$ können wir abschätzen:

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \ln(p) \overset{p > x^{1-\varepsilon}}{\geq} \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} (1-\varepsilon)\ln(x)$$

$$\geq (1-\varepsilon)\ln(x) \cdot \left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\varepsilon}\right)\right)$$

$$\geq (1-\varepsilon)\ln(x) \cdot \left(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \pi(x)\ln(x) \leq \frac{\theta(x)}{1-\varepsilon} + \ln(x)\, x^{1-\varepsilon} \qquad (**)$$

$$(*) \Longrightarrow \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \geq \lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \overset{\text{Kor.}}{=} 1.$$

$$(**) \Longrightarrow \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1$$

$\Longrightarrow$ Beh. $\square$