Vorüberlegung zur Injektivität von Grenzfunktionen

Satz Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n \in \mathcal{O}(U)$ eine Folge von Funktionen, die kompakt gegen $f \in \mathcal{O}(U)$ konvergieren. Wenn alle f_n injektiv sind, dann ist f entweder konstant oder selbst injektiv.

Beweis Wir nehmen an: f nicht injektiv und auch nicht konstant. Also gibt es $z_1, z_2 \in U$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. OE sei $f(z_1) = 0$.

Jetzt wähle $\varepsilon > 0$ so, dass folgendes gilt

1) f hat in $\overline{B_\varepsilon(z_1)}$ nur eine Nullstelle, nämlich z_1

2) keines der f_n hat auf $\partial B_\varepsilon(z_1)$ eine Nullstelle.

Wir wissen nach dem Satz über das Zählen von Nullstellen:

$$\#\text{ Nullstellen von } f \text{ in } B_\varepsilon(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_1)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

$$\overset{\text{komp.}}{\underset{\text{Konvergenz}}{=}} \lim \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_1)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = \#\text{ Nullstellen von } f_n \text{ in } B_\varepsilon(z_1)$$

Dasselbe kann mit der Nullstelle bei z_2 machen. Also müssen auch f_n für ausreichend großes n mehrere Nu haben, sind also nicht injektiv!

Der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes in drei leichten Schritten

* So einfach wie 1 - 2 - 3 *

Schritt 1 Wir wollen erst einmal irgendeine Abbildung (bitte injektiv) von U in die Kreisscheibe $B_1(0)$.

- Weil $U \subsetneq \mathbb{C}$ ist, können wir OE annehmen, dass U den Nullpunkt nicht enthält, also $U \subset \mathbb{C}^*$
- Weil U einfach zshgd ist, existiert ein Logarithmus!

$$\log : U \to \mathbb{C}, \quad \text{sodass } \forall z \in U: \exp(\log z) = z$$

Erste Folgerung: log ist auf jeden Fall schon einmal injektiv!

verfeinerte Folgerung: Wenn $z \in \mathrm{Img}(\log)$, dann $z + 2\pi i \notin \mathrm{Img}(\log)$.

Anwendung: Wir wissen schon („lokale Gestalt holomorpher Funktionen"): die Abb. log ist offen, die Bildmenge enthält also eine Kreisscheibe $B_r(p) \subset \mathrm{Img}(\log)$.

Dann ist die Kreisscheibe $B_r(p + 2\pi i)$ disjunkt zu $\mathrm{Img}(\log)$!

Also: $\log - (p + 2\pi i) : U \longrightarrow \mathbb{C}$

ist injektiv, alle Bildpunkte haben Betrag $> r$

und $\quad f : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \dfrac{1}{\log(z) - (p + 2\pi i)}$.

ist injektiv, alle Bildpunkte haben Betrag < 1.

$\rightsquigarrow$ Wir haben injektive Abbildung $f : U \to B_1(0)$ gefunden!

<u>Schritt 2.</u> Nach Schritt 1 können wir OE annehmen, dass $U \subset B_1(0)$ ist und den 0-Punkt enthält. (... und dann auch eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(0) \subseteq U \subseteq B_1(0)$).

Wir betrachten injektive holomorphe Abbildungen $f: U \to B_1(0)$

- klar: es gibt eine (nämlich Id.)
- auch klar: wenn f eine ist, dann ist f betragsmäßig durch 1 beschränkt. Insbesondere:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{f(z)}{z^2}\, dz$$

ist betragsmäßig $\leq \varepsilon^{-1}$.

<u>Konsequenz.</u> die Menge

$$\left\{ |f'(0)| \;\middle|\; f(0)=0 \text{ und } f: U \to B_1(0) \text{ injektiv} \right\}$$

hat ein Supremum, $S \geq 1$.

Sei $f_n \in \mathcal{O}(U)$ eine Folge von injektiven Abbildungen, $U \to B_1(0)$ sodass $f_n'(0)$ gegen S konvergiert.

Nach dem Satz von Montel können wir die Funktionenfolge sogar so wählen, dass f_n kompakt konvergiert. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ die Grenzfunktion. Folgendes lässt sich sofort sagen

- Wegen kompakter Konvergenz ist die Grenzfunktion holomorph.

- Wegen kompakter Konvergenz + Integraldarstellung der Ableitung ist $f'(0) = \lim f_n'(0)$, hat also Betrag $= s$ und $s \geq 1$. Also ist f sicher nicht konstant.

- Im Prinzip gilt $\forall p \in U: \; |f(p)| = \lim |f_n(p)| \leq 1$ also $\operatorname{Img} f \subseteq \overline{B_1(0)}$. Weil f aber offen ist (und sowieso das Max. prinzip gilt) ist $\operatorname{Img} f \subseteq B_1(0)$

- Nach dem Satz über die Injektivität von Grenzfunktionen ist f wieder injektiv.

Schritt 3: Wir haben jetzt $U \subset B_1(0)$, $0 \in U$

und eine holomorphe Abb. $f: U \to B_1(0)$ sodass $f(0) = 0$ ist, f injektiv und $f'(0)$ betragsmäßig maximal. Ich zeige: f ist surjektiv, also bijektiv. Der Satz über die lokale Gestalt von holomorphen Funktionen zeigt dann: f ist biholomorph.

Beweis durch Widerspruch! Ang. $\exists\, p \in B_1(0) \setminus f(U)$. Wir werden dann $g \in \mathcal{O}(U)$ konstruieren mit

- $\operatorname{Img}(g) \subset B_1(0)$
- g injektiv
- $g(0) = 0$
- $g'(0)$ betragsmäßig echt größer als $f'(0)$ $\lightning$

Das geht so

a) Erinnerung: es gibt $h_1 \in \operatorname{Aut}(B_1(0))$, der die Punkte p und 0 vertauscht. Die Abb. $h_1 \circ f \in \mathcal{O}(U)$ ist also injektiv, aber 0 liegt nicht im Bild.

b) Weil U einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Wurzel von $h_1 \circ f$. Genauer: es gibt holom. Abb $w: U \to B_1(0)$ sodass $\forall z \in U: (w(z))^2 = h_1 \circ f(z)$.

Wir schreiben $q \circ w = h_1 \circ f$

wobei $q: B_1(0) \to B_1(0)$ $z \mapsto z^2$ ist.

c) Die Abb. w ist injektiv (... denn $h_1 \circ f$ ist injektiv), der Nullpunkt wird aber vielleicht nicht auf den Nullpunkt abgebildet. Kein Problem! Wähle Automorphismus $h_2 \in \mathrm{Aut}(B_1(0))$ welcher 0 und $w(0)$ vertauscht.

Setze $g := h_2 \circ w$. Dann ist $w : U \to B_1(0)$ holomorph, injektiv, bildet 0 auf 0 ab und

$$q \circ w = h_1 \circ f$$

$$\Leftrightarrow \quad q \circ h_2^{-1} \circ g = h_1 \circ f$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(h_1^{-1} \circ \cancel{g} \, q \circ h_2^{-1} \right)}_{=: \varphi} \circ g = f$$

Beobachtung: φ ist eine holomorphe Abb. von $B_1(0)$ nach $B_1(0)$ es ist

$$\varphi(\underbrace{g(0)}_{=0}) = \underbrace{f(0)}_{=0}$$

und φ ist keine Drehung! Die Abb. φ ist nämlich kein bisschen injektiv!!

Lemma von Schwarz: $|\varphi'(0)| < 1$.

Also: $|g'(0)| > |f'(0)|$ $\square$