§ 6.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Satz / Ziel dieses Abschnitts Es sei $U \subsetneq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann ist U biholomorph zur Kreisscheibe $B_1(0)$.

Bemerkung: Die Annahme $U \subsetneq \mathbb{C}$ ist wichtig, denn $U = \mathbb{C}$ ist nicht biholomorph zu $B_1(0)$

Zentrales technisches Hilfsmittel ist der folgende Satz über gleichmäßig ~~B~~ beschränkte Funktionenfolgen („betragsmäßig simultan beschränkt")

Def Eine Funktionenfolge $f_n : U \to \mathbb{C}$ ist gleichmäßig beschränkt, wenn gilt: $\exists R \in \mathbb{R}: \forall p \in U: \forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n(p)| < R$.

... „lokal gleichmäßig beschränkt", wenn jeder Punkt $p \in U$ eine Umgebung $V = V(p) \subset U$ hat, sodass $f_n|_V : V \to \mathbb{C}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz von Montel Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n \in \mathcal{O}(U)$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge von holomorphen Funktionen. Dann gibt es eine Teilfolge, die kompakt konvergiert.

Erinnerung (Heine-Borel) Es sei a_n eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge. Insbesondere: wenn $p \in U$ gegeben ist, dann gibt es Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$ sodass $f_{n_\bullet}(p)$ konvergiert.

Vorüberlegung 1 zum Satz von Montel Wir wissen, es gibt eine abzählbare Basis der Topologie. Insbesondere gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge $p_1, p_2, p_3, \ldots$ von U.

- Es gibt Teilfolge $f_{n_1^1}, f_{n_2^1}, f_{n_3^1}, \ldots$ die bei p_1 konvergiert.
- Davon gibt es Teilfolge $f_{n_1^2}, f_{n_2^2}, f_{n_3^2}, \ldots$ die bei p_1 und p_2 konvergiert

...

Am Ende: die Teilfolge $f_{n_1^1}, f_{n_2^2}, f_{n_3^3}, \dots$

konvergiert bei allen p. !

<u>Vorüberlegung 2 zum Satz von Montel</u> Wenn $\overline{B_r}(p) \subset U$ ist, dann wissen wir nach der Integralformel für Ableitungen:

$$f_n'(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f_n(z)}{(z-w)^2}\, dz \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \cdot \forall w \in B_r(p).$$

Beachte:

- $f_n(z)$ ist per Annahme betragsmäßig beschränkt.
- auf $B_{1/2 \cdot r}(p)$ ist $\frac{1}{(z-w)^2}$ ebenfalls betragsmäßig beschränkt

Wir erhalten: $f_n'(w)$ ist beschränkt. Genauer:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \forall w \in B_{1/2 \cdot r}(p) : \quad |f'(w)| < M.$$

<u>Konsequenz (Mittelwertsatz)</u> $\forall n \in \mathbb{N} : \forall w \in B_{1/2 r}(p)$:

$$|f(p) - f(w)| < M \cdot |p - w|.$$

<u>Konsequenz:</u> $\forall p \in U: \forall \varepsilon > 0: \exists \delta_{p,\varepsilon} > 0:$

$$B_{\delta_{p,\varepsilon}}(p) \subset U \quad \underline{\text{und}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall w \in B_{\delta_{\varepsilon,p}}(p).$$

$$|f_n(p) - f_n(w)| < \varepsilon/3.$$

Beweis des Satzes von Montel

Nach Vorüberlegung 1 können ~~für~~ wir die Folge f_n (falls nötig) durch eine Teilfolge ersetzen und OE annehmen, dass eine abzählbare, dichte Teilmenge $p_1, p_2, \ldots \subset U$ existiert, sodass $f_n(p_\circ)$ konvergiert.

Wir werden zeigen, dass die Folge f_n dann bereits kompakt konvergiert: gegeben ein Kompaktum $K \subset U$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index N, sodass $\forall n, m > N$, $\forall p \in K$: $|f_n(p) - f_m(p)| < \varepsilon$.

Seien also K und ε gegeben.

Man beachte: die Kreisscheiben $B_{\delta_{p_i, \varepsilon/3}}(p_i)$ überdecken ganz U.

Weil K kompakt ist, überdecken endlich viele dieser Kreisscheiben die Menge K. Nach Umnummerierung seien dies

$$B_{\delta_{p_1, \varepsilon/3}}(p_1) \quad , \dots , \quad B_{\delta_{p_\ell, \varepsilon/3}}(p_\ell).$$

Jetzt kann ich nach Annahme $N \in \mathbb{N}$ wählen, sodass

~~$\forall n, m > N:$~~

$$\forall n, m > N : \forall 1 \leq i \leq \ell : \quad | f_n(p_i) - f_m(p_i) | < \varepsilon/3 .$$

Gegeben irgendein $p \in K$, so gibt es nun ein p_i, $1 \leq i \leq \ell$ sodass $p \in B_{\delta_{p_i, \varepsilon/3}}(p_i)$ und $\forall n, m > N$ ist

$$| f_n(p) - f_m(p) | = | f_n(p) - f_n(p_i) + f_n(p_i) - f_m(p_i) + f_m(p_i) - f_m(p) |$$

$$\leq | f_n(p) - f_n(p_i) | + | f_n(p_i) - f_m(p_i) | + | f_m(p_i) - f_m(p) |$$

$$\leq \varepsilon .$$

$\square$