Konsequenzen von Harmonizität

Prop. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend $f: U \to \mathbb{R}$ harmonisch.

Wenn f auf U ein Maximum oder Minimum annimmt, dann ist f konstant.

Beweis Angenommen, $M := \max \{ f(z) \mid z \in U \}$ existiert und $f(p) = M$. Wenn $\varepsilon \ll 1$ ausreichend klein ist, dann gilt

$$\overline{B_\varepsilon(p)} \subset U \quad \text{und} \quad \forall z \in \partial B_\varepsilon(p): \quad f(z) \leq f(p).$$

Die Gleichung

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \varepsilon \cdot e^{it})\, dt$$

impliziert aber $f(p) = f(z) \quad \forall z \in \partial B_\varepsilon(p)$.

Es folgt, dass f auf $B_\varepsilon(p)$ konstant ist, also ist die Menge $\{ z \mid f(z) = M \}$ offen. Per Def. ist die Menge aber auch abgeschlossen. $\square$

Lemma Seien $f_1, f_2 \in C^0(\overline{B_r(p)})$ zwei stetige Funktionen die beide auf dem Rand der Kreisscheibe übereinstimmen und im inneren der Kreisscheibe harmonisch sind. Dann $f_1 = f_2$.

Beweis $f_1 - f_2$ ist stetig, auf dem Rand $= 0$ und im inneren harmonisch. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt die Funktion Minimum & Maximum an! Sollten diese $\neq 0$ sein, werden sie im Inneren angenommen, dann ist aber die Funktion konstant! $\square$

Konstruktion von harmonischen Funktionen

Es sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis und $h : S^1 \to \mathbb{R}$ sei stetig.

Dann betrachte

$$\bar{h} : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} h(z) & \text{falls } |z| = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \cdot \mathrm{Re}\, \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Nachrechnen</u> (mühsam, mache ich jetzt nicht)

- $\bar{h} : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ ist stetig
- $\bar{h}|_{B_1(0)}$ ist harmonisch.

<u>Konsequenz</u> Gegeben eine Kreisscheibe $B_r(p) \subset \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $h : \partial B_r(p) \to \mathbb{R}$, so gibt es genau eine stetige Funktion $\bar{h} : \overline{B_r(p)} \to \mathbb{R}$ die auf dem Rand mit h übereinstimmt und im Inneren harmonisch ist.

Bemerkung: Die Integralformel heisst „Poisson Transformation".

Diese Formel ist eng mit der Fourier-Transformation von h verwandt. Betrachte die Fourier-Entwicklung der periodischen Funktion

$$h': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto h(\exp(it))$$

$$h'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ikt)$$

setze jeden Term einzeln ein und schau' mal, was passiert.

Bemerkung: Wir wissen (Satz „Ableiten unter dem Integral"), dass die Abb

$$B_1(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) \cdot \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, dt$$

holomorph ist. Konsequenz: auf einer Kreisscheibe ist jede harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion!

<u>Achtung!</u> Im Allgemeinen sind harmonische Funktionen nicht unbedingt Realteile von holomorphen Funktionen.

<u>Beispiel:</u> Der Hauptzweig des Logarithmus

$$\log: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \log|z| + i \cdot \arg(z)$$

ist nicht stetig, weil arg nicht stetig ist. Aber:

$h: z \mapsto \log|z|$

ist auf ganz $\mathbb{C}^*$ harmonisch.

Falls h der Realteil einer holom. Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ wäre, dann ist

$$\mathrm{Re}\,(\varphi \circ \exp - \mathrm{Id}) \equiv 0$$

also $\varphi \circ \exp - \mathrm{Id} \equiv 0$

also φ eine Logarithmus-Funktion. Eine solche Funktion existiert aber nicht, wie wir wissen.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann äquivalent

1) f ist harmonisch

2) f ist 2x stetig diff'bar und

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f \equiv 0$$

Bemerkung: Δ wird auch als Laplace-Operator bezeichnet.

Beobachtung: Wenn $g: U \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ 2x diff'bar ist, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \Delta f.$$

Beweis $1 \Rightarrow 2$: Ich kann OE annehmen, dass U eine Kreisscheibe ist. Dort kann ich mithilfe der Poisson-Transformation f als Realteil einer holomorphen Funktion $f' \in \mathcal{O}(U)$ schreiben. Klar, dass $\frac{\partial f'}{\partial z}$ holomorph ist, also

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f = 0 = \Delta f' = \Delta (\underbrace{\operatorname{Re} f'}_{=f}) + i \Delta (\operatorname{Im} f')$$

Also $\Delta f \equiv 0$.

Beweis $2 \Rightarrow 1$ $\quad \Delta f = 0 = \frac{\partial}{\partial \bar z} \frac{\partial}{\partial z} f$. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{holomorph!}$$

Jetzt müssen wir testen, ob f harmonisch ist. Sei also eine abg. Kreisscheibe $\overline{B_r(p)} \subset U$ gegeben.
Dann ist für $\varepsilon \ll 1$ auch $B_{r+\varepsilon}(p) \subset U$ und dort hat die holomorphe Funktion $\frac{\partial f}{\partial z}$ eine Stammfunktion, $F \in \mathcal{O}(B_{r+\varepsilon}(p))$.

Es gilt: $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial f}{\partial x}$$

$\cancel{\Rightarrow 1 \ \mathrm{grad}\, F =}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, \mathrm{Re}(F) = \mathrm{grad}\, f$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(F)$ und f unterscheiden sich nur um additive Konstante $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ auf $B_{r+\varepsilon}(p)$ ist f Realteil einer holomorphen Funktion, also harmonisch! $\square$

Bem Derselbe Beweis zeigt noch.

Satz Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{R}$.

Dann äquivalent

1) f ist harmonisch.

2) f ist Realteil einer holomorphen Funktion

Die holomorphe Funktion aus (2) ist eindeutig bis auf Addition mit einer rein imaginären Zahl. $\square$