Anwendungen des Residuensatzes

Satz von Weierstraß über Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen

Sei $P \subset \mathbb{C}$ diskret & abgeschlossen. Weiter sei $n : P \to \mathbb{N}$ irgendeine Funktion. Dann gibt es $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, sodass

1) Nullstellenmenge $(f) = P$

2) $\forall\, p \in P$: $\text{nullstellenord.}_p (f) = n(p)$.

Beweis

Wir beobachten zuerst: wenn eine holomorphe Funktion an einem Punkt p eine Nullstelle hat der Ordnung n, dann entwickle lokal in Potenzreihe, schreibe

$$f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i (z-p)^i$$

$$f'(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (z-p)^{i-1}$$

$$f^{-1}(z) = a_n^{-1} \cdot (z-p)^{-n} + \sum_{i=-n+1}^{\infty} \dots$$

$$f'/f = \underbrace{n \cdot (z-p)^{-1}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{(\text{Potenzreihe})}_{\text{Nebenteil}}$$

Das legt nahe, den Satz von Mittag-Leffler zu verwenden:

es sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P)$, sodass für alle $p \in P$ gilt:

Hauptteil von g an der Stelle p ist $\frac{n(p)}{z-p}$

<u>Residuensatz:</u> Wenn γ irgendein geschlossener Weg in $\mathbb{C}\setminus P$ ist, dann ist

$$\int_\gamma g(z)\,dz \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z} \quad \ker(\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*)$$

<u>Konsequenz:</u> Wähle irgendeinen Punkt $q \in \mathbb{C}\setminus P$. Gegeben $w \in \mathbb{C}\setminus P$, wähle Weg γ von q nach w. Stelle fest, dass

$$\exp \int_\gamma g(z)\,dz$$

nicht von der Wahl des Weges γ abhängt. Wir erhalten also eine Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus P \longrightarrow \mathbb{C}; \quad w \mapsto \exp \int_q^w g(z)\,dz.$$

Beobachtung 1: f hat auf $\mathbb{C} \setminus P$ keine Nullstellen

Beobachtung 2: Es ist $f'/f = g$

Wenn jetzt ein Punkt $p \in P$ gegeben ist, betrachte $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(p) \cap P = \{p\}$

Dort schreibe
$$g = \frac{n(p)}{z-p} + \underbrace{h(z)}_{\in \mathcal{O}(B_\varepsilon(p))}$$

Also ist auf $B_\varepsilon(p)$:
$$f' = \left[\frac{n(p)}{z-p} + h(z) \right] \cdot f$$

Diese DGL können wir lösen:
$$f\big|_{B_\varepsilon(p)} = \underbrace{\mathrm{const}}_{\in \mathbb{C}^*} \cdot \exp\left(H(z)\right) \cdot (z-p)^{n(p)}$$

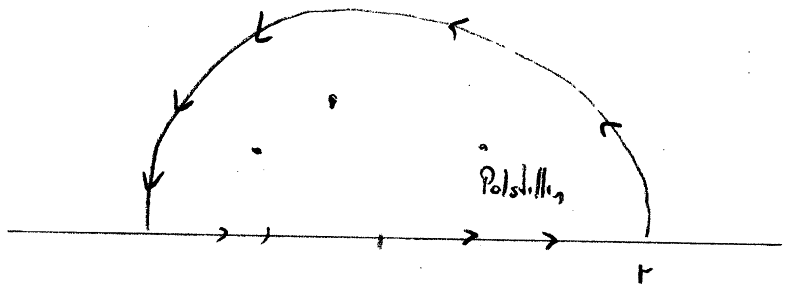
wobei $H =$ Stammfunktion von h.

Also hat f am Punkt p tatsächlich eine Nullstelle der Ordnung $n(p)$ $\square$

Anwendungen zur Integration

Beobachtung: Es sei $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ eine rationale Funktion,

wobei
- $\deg b(z) \geq [\deg a(z)] + 2$
- f hat auf der reellen Achse keine Nullstellen.



Wenn $r \gg 0$ ist, dann liegen in $\{\operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus B_r(0)$ keine Polstellen mehr, das Integral

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(z)\,dz + \int_{\text{Halbkreis}} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}(f, z)$$

hängt nicht von r ab.

Auf der anderen Seite rechnet man noch:

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

die linke Seite fällt sogar quadratisch ab (da $q \geq 2$)

$$\Rightarrow \int_{\text{halbkreis}} f(z)\,dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Img}(z)>0} \mathrm{Res}(f,z)$$

Varianten Es sei $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ eine rationale Funktion

ohne Polstelle auf der reellen Achse, $\deg b > \deg a$.

Dann existieren

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r f(x) \cdot e^{ix} \, dx \qquad \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^0 f(x) \cdot e^{ix} \, dx$$

Und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{ix} \, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}\left(f(z) \cdot e^{iz}, z_0 \right)$$

Beweis Ähnlich wie in letzten Beispiel; komplizierter Abschätzung nötig.

<u>Variante</u> Es sei $f(z) = \dfrac{a(z)}{b(z)}$ eine reelle Funktion ohne Polstellen auf der reellen Achse, wobei $\deg b \geq 2 + \deg a$.

<u>Fakt (Analysis)</u> Für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert das Integral

$$\tilde{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{ixy} \, dx$$

Die Funktion wird „Fourier-Transformierte" genannt.

Substitution $u = x \cdot y$ $\left(x = \frac{u}{y} \, ; \quad dx = \frac{1}{y} \, du \right)$ liefert

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{y}\right) e^{iu} \cdot du$$

$\leadsto$ kann ich mithilfe des Residuensatzes ausrechnen, wenn Partialbruchzerlegung von f bekannt ist.

§6 Weiterführende Themen

§6.1 Harmonische Funktionen

In der angewandten Mathematik, math. Physik & Stochastik betrachtet man häufig „harmonische Funktionen"

Def Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine stetige Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ heisst harmonisch, wenn für jede Kreisscheibe $\overline{B_r(p)} \subset U$ gilt:

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + r \cdot e^{it})\, dt$$

(„Funktionswert bei p ist Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand der Kreisscheibe")

Beispiel Real- und Imaginärteile von holomorphen Funktionen sind harmonisch! ($\leadsto$ Mittelwertsatz!)