2. Anwendung: Der Residuensatz.

Motivation/Frage: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ endlich, $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \setminus P$ geschlossener Weg, der in U zusammenziehbar ist. Wie können wir $\int_\gamma f(z)\, dz$ für $f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$ einfach berechnen?

Bem.: (1) $P = \emptyset$ (d.h. $f \in \mathcal{O}(U)$) $\xRightarrow[\text{Integralsatz}]{\text{Cauchy-}}$ $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(2) $\int_{\gamma_-} = - \int_\gamma$, also muss es eine Rolle spielen, wie γ durchlaufen wird.

(3) Sei $p \in P$ und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-p)^k$ auf $\overline{K_{0,R}(p)} \subset U \setminus P$, $R \in \mathbb{R}$. Der Beweis des Satzes über die Laurent-Entwicklung zeigt

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} f(z)\, dz.$$

Die Koeffizienten c_{-1} scheinen also eine besondere Rolle zu spielen...

Wir präzisieren zunächst (2):

Satz und Definition: Sei $p \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ ein geschlossener Weg. Dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$, s.d. γ frei homotop zu $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$, $t \longmapsto p + \exp(2\pi i n t)$ ist. Konkret ist

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p}\, dz.$$

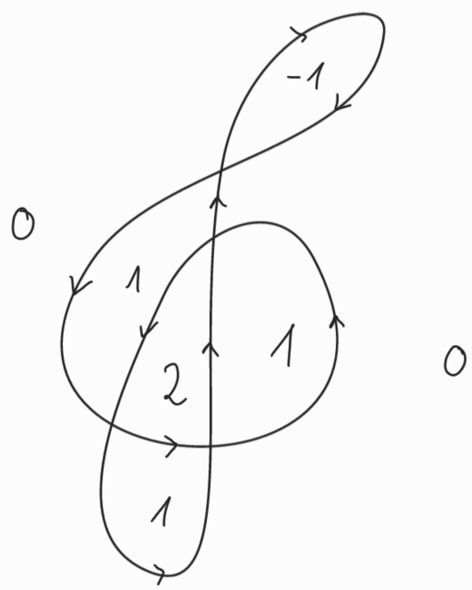
Die Zahl n heißt die Umlaufzahl oder Windungszahl $\mathrm{Um}(\gamma, p)$ von γ um p.

Anschauung / Topologie: Die Umlaufzahl zählt, wie oft γ den Punkt p entgegen des Uhrzeigersinns umläuft. Hierbei werden Umrundungen im Uhrzeigersinn mit -1 gezählt. In der Topologie schreibt man „$\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{p\}) \cong \mathbb{Z}$".

Graphische Berechnung: $Um(\gamma, p)$ hängt nur von der Zusammenhangskomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ab, in der sich p befindet.

Regel 1: Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ist die Umlaufzahl $=0$.

Regel 2: Die Windungszahl „benachbarter Zshgs.komp." unterscheidet sich um 1 (wenn γ einmal durchlaufen wird), wobei die größere Zahl in Fahrtrichtung links liegt.

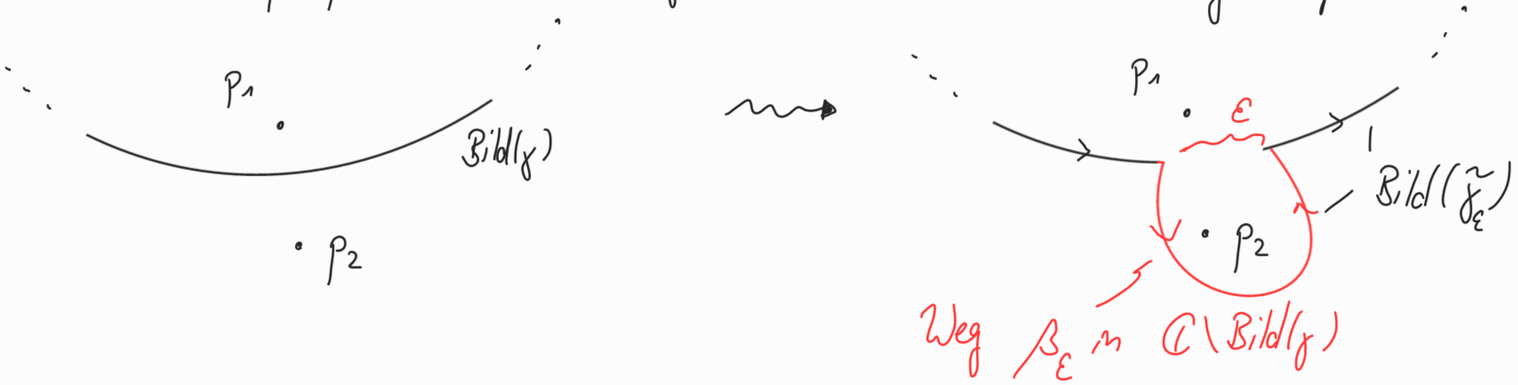


Begründung: • $Um(\gamma, \cdot): \mathbb{C}\setminus Bild(\gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig (Satz über parameterabh. Integrale) $\overset{\mathbb{Z} \text{ diskret}}{\Longrightarrow}$ auf jeder Zshg.skomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ist $Um(\gamma, \cdot)$ konstant.

• γ ist in $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ zusammenziehbar, falls p in der unbeschränkten Zshgs. komp. von γ liegt.

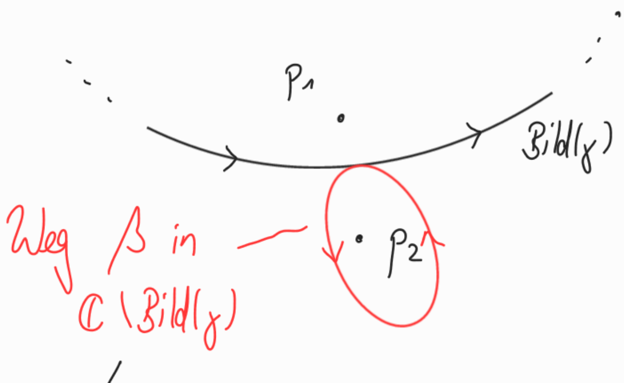
$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Integralsatz}}{\Longrightarrow}} \quad \int_\gamma \frac{1}{z-p}\,dz = \mathrm{Um}(\gamma, p) = 0 \qquad (\Longrightarrow \text{Regel } 1)$$

- Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$ in benachbarten Zshgs. Komp.



$$\Longrightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Um}(\gamma, p_1)}}{\mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_1)} = \mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_2)$$

$\mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_2)$ hängt nicht von ε ab.



β ist in $\mathbb{C}\setminus\{p_2\}$ frei homotop zu $B_r(p_2)$ oder $B_r(p_2)_-$.

$$\Longrightarrow \quad \int_\beta \frac{1}{z-p_2}\,dz = \int_{\substack{B_r(p_2) \\ \text{oder } B_r(p_2)_-}} \frac{1}{z-p_2}\,dz$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Integralformel}}{=}} \quad \pm 2\pi i.$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Um}(\tilde{\gamma}, p_2) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\int_\gamma \frac{1}{z - p_2}\, dz + \int_\beta \frac{1}{z - p_2}\, dz \right)$$

$$= \mathrm{Um}(\gamma, p_2) \pm 1$$

$\Longrightarrow$ Regel 2. $\square$

Beweis des Satzes über die Umlaufzahl:

Durch Verschiebung o.E. $p = 0$.

<u>Beh.:</u> Für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $\exp(a) = \gamma(0)$ gibt es einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}(0) = a$.

<u>Bew. der Beh.:</u> Falls $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, nehmen wir

$$\tilde{\gamma}(t) = \log(\gamma(t)) + 2\pi i k,$$

Hauptzweig des Logarithmus

wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt sei, dass $\tilde{\gamma}(0) = a$.

Analog kann $\tilde{\gamma}$ definiert werden, wenn $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}\, w$ für ein $w \in \mathbb{C}^*$.

I.A. wählen wir $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ so, dass $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils in einem $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}\, w_i$ enthalten ist.

$\rightsquigarrow$ erhalte Wege $\tilde{\gamma}_i$ mit $\exp \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$

$\Longrightarrow$ $\forall i$: $\exp(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = \exp(\tilde{\gamma}_{i+1}(t_i)) = \gamma(t_i)$

$\rightsquigarrow$ Wähle induktiv $\tilde{\gamma}_{i+1}(t_i) = \tilde{\gamma}_i(t_i)$.

$\rightsquigarrow$ bekomme stetigen Weg $\tilde{\gamma}$ durch Verknüpfen der $\tilde{\gamma}_i$ $\square_{\text{Beh.}}$

<u>Existenz von n:</u>

<u>Beob.:</u> $\exp(\tilde{\gamma}(0)) = \gamma(0) = \gamma(1) = \exp(\tilde{\gamma}(1))$.

$\Longrightarrow$ $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in \ker(\exp) = 2\pi i\,\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{Z}$: $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) + 2\pi i n$.

$\Longrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ ist in $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ homotop zu $\beta: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \tilde{\gamma}(0) + 2\pi i n t$,
da $\beta(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\beta(1) = \tilde{\gamma}(1)$

$\Longrightarrow$ $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ homotop zu $\underbrace{\exp \circ \beta,\ t \longmapsto \gamma(0) \exp(2\pi i n t)}_{\text{in } \mathbb{C}^* \text{ frei homotop zu } t \longmapsto \exp(2\pi i n t)}$

$\Longrightarrow$ Existenz von n.

<u>Eindeutigkeit von n:</u> Haben

$$n \overset{\text{explizites Ausrechnen}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\exp \circ \beta} \frac{1}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz \qquad \square$$

Zu (3): Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$, $p \in U$ und $R > 0$ s.d. $K_{0,R}(p) \subset U$.

Def.: Der Koeff. $\mathrm{Res}_p(f)$ vor $(z-p)^{-1}$ in der Laurent-Entwicklung von f in p heißt das Residuum von f in p.

Bem.: f hat in p hebbare Sing. $\Longrightarrow$ $\mathrm{Res}_p(f) = 0$
$\not\Longleftarrow$ z.B. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z = 0$

Bsp.: $f(z) = \frac{1}{z}$, $\mathrm{Res}_p(f) = \begin{cases} 0, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}$.

Erinnerung von oben: $\mathrm{Res}_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} f(z)\, dz$.
R so, dass $\overline{B_R(p)} \subset U$

Residuensatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ endlich, $f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$. Sei weiter $\gamma: [a,b] \longrightarrow U \setminus P$ geschlossen, s.d. γ in U zs. ziehbar ist. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{p \in P} \mathrm{Um}(\gamma, p) \cdot \mathrm{Res}_p(f).$$

Beweis: Sei $p \in P$. Entwickle f in eine Laurent-Reihe in p:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (z-p)^k.$$

Definiere $h_p(z) := \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k \cdot (z-p)^k$.

$\Longrightarrow h_p \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ und $\sum_{k=-\infty}^{-2} c_k \cdot \frac{(z-p)^{k+1}}{k+1}$ ist Stamm-fkt. von h_p.

<u>Beob.:</u> $f(z) - h_p(z) - \mathrm{Res}_p(f) \cdot (z-p)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k$ hat in p eine hebbare Sing.!

$\Longrightarrow g(z) := f(z) - \sum_{p \in P} h_p(z) - \sum_{p \in P} \mathrm{Res}_p(f) \cdot (z-p)^{-1}$ hat in allen $p \in P$ hebbare Sing.

Cauchy - Integralsatz $\xRightarrow{\gamma \text{ zs. ziehbar}} \int_\gamma g(z)\, dz = 0$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{p \in P} \underbrace{\int_\gamma h_p(z)\, dz}_{=0, \text{ da } h_p \text{ eine Stammfkt. hat}} + \sum_{p \in P} \underbrace{\int_\gamma \frac{\mathrm{Res}_p(f)}{z-p}\, dz}_{= 2\pi i \cdot \mathrm{Um}(\gamma, p) \cdot \mathrm{Res}_p(f)}$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{p \in P} \mathrm{Um}(\gamma, p) \cdot \mathrm{Res}_p(f)$$

$\square$

Berechnung von Residuen: Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$.

(a) Wenn $\lim\limits_{z \to p} (z-p) f(z) =: \alpha \in \mathbb{C}$, so gilt $\mathrm{Res}_p(f) = \alpha$

Begr.: f hat in p höchstens einen Pol 1. Ordnung.

$\leadsto$ $f(z) = c_{-1}(z-p)^{-1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k \implies c_{-1} = \alpha.$

Bem.: Dies gilt insb. für $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in \mathcal{O}(U)$ und $h(p) = 0$, $h'(p) \neq 0$

$$(z-p)\, f(z) = \frac{g(z)}{\left(\frac{h(z) - h(p)}{z-p}\right)} \xrightarrow{z \to p} \frac{g(p)}{h'(p)} = \alpha = \mathrm{Res}_p(f)$$

Wichtiger Spezialfall der Bem.:

Wenn f in p keine essentielle Sing. hat, so gibt es $\nu_p(f) \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$g(p) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z-p)^{\nu_p(f)} \cdot g(z).$$

$$\implies \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu_p(f) \cdot (z-p)^{\nu_p(f)-1} \cdot g(z) + (z-p)^{\nu_p(f)} \cdot g'(z)}{(z-p)^{\nu_p(f)} \cdot g(z)}$$

$$= \frac{\nu_p(f) \cdot g(z) + (z-p) \cdot g'(z)}{(z-p) \cdot g(z)} \quad =: h(z)$$

$h(p) = 0$,
aber $h'(p) = g(p) \neq 0$

$$\implies \mathrm{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{\nu_p(f) \cdot g(p)}{g(p)} = \underline{\underline{\nu_p(f)}}$$

(b) Wenn $g \in \mathcal{O}(U)$, $\nu \geq 2$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^\nu}$, dann gilt

$$\mathrm{Res}_p(f) = \frac{1}{(\nu-1)!} \, g^{(\nu-1)}(p).$$

<u>Begr.:</u> $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k$, $a_k = \frac{g^{(k)}(p)}{k!}$.

Also ist der Koeff. vor $(z-p)^{-1}$ in der Laurententwicklung von f gleich

$$\frac{1}{(\nu-1)!} \, g^{(\nu-1)}(p).$$

(c) Benutze bekannte Reihenentwicklungen (z. B. $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\sin z, \ldots$)

<u>Bsp.:</u> $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6 z^3} + \frac{1}{120 z^5} - \ldots \right)$

$\Longrightarrow \mathrm{Res}_0(f) = -\frac{1}{6}$.

Anwendungen des Residuensatzes:

Situation / Notation:

- $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $P \subset U$ abg. & diskret
- $0 \neq f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$ habe keine essentiellen Sing.
- $N := \{ z \in U \mid f(z) = 0 \}$ sei die Menge der Nst. von f
- $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \setminus (N \cup P)$ sei ein in U zs. ziehbarer Weg.

Satz: (Zählen von Null- und Polstellen)
In der Situation gilt

$$\mathrm{Um}(f \circ \gamma, 0) = \underbrace{\sum_{p \in U} \mathrm{Um}(\gamma, p) \cdot \nu_p(f)}_{\text{nur endl. viele Summanden} \neq 0.}$$

Beweis: Es gilt

$$\mathrm{Um}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz \overset{\text{Residuensatz}}{\underset{\text{(a) von oben}}{=}} \sum_{p \in U} \mathrm{Um}(\gamma, p) \cdot \nu_p(f).$$

$\square$

Kor.: (Satz von Rouché)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $K \subset U$ eine abg. Kreisscheibe.
Sei außerdem $g \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\forall z \in \partial K : \quad |f(z)| > |g(z)| \qquad (*)$$

Dann:
(1) Alle Nst. von f und $f+g$ auf K liegen im Inneren von K.
(2) Mit Vfh. gezählt haben f und $f+g$ die gleiche Anzahl an Nst. auf K.

Beweis: Für $t \in [0,1]$ sei $h_t(z) := f(z) + t\, g(z)$.

$$(*) \Longrightarrow h_t(z) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1] \text{ und } z \in \partial K.$$

$$|h_t(z)| \geq \big| |f(z)| - t\,|g(z)| \big| \overset{(*),\, t \leq 1}{>} 0$$

$\Longrightarrow$ (1)

Wissen: $$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz = \begin{pmatrix} \#\text{ der Nst. von} \\ h_t \text{ in } K \end{pmatrix}$$

stetig (param. abh. Integral)

$\Longrightarrow N(0) = N(1)$ $\square$

Bsp.: z.z. $\underbrace{\frac{1}{10} z^7 + 1}_{=: g(z)} + \underbrace{5z^2}_{=: f(z)}$ hat genau 2 Nst. in $B_1(0)$

$\Longrightarrow \forall z$ mit $|z| = 1$: $\quad |f(z)| = 5 > 1 + \frac{1}{10} \geq |g(z)|$

f hat 2 Nst. in $B_1(0)$ $\overset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ Beh.