Funktionentheorie: Vorlesung 22.06.2022

Erinnerung: Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Für $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(z_0))$ gibt es genau eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad \forall z \in K_{r,R}(z_0).$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

Bsp.: Sei $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$.

(1) Auf $K_{0,1}(0)$:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|z|<1 \Rightarrow |\frac{z}{2}|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{k+1}} z^k.$$

(2) Auf $K_{1,2}(0)$: Dieselbe Reihe wie in (1), da $|z| < 2 \implies \left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

(3) Auf $K_{2,\infty}(0)$: Hier können wir nicht die Reihe aus (1) & (2) nehmen.

Beobachte: $|z| > 2 \implies \left|\frac{2}{z}\right| < 1$.

$\rightsquigarrow$ Auf $K_{2,\infty}(0)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{2^k} \cdot z^{k-1}.$$

Bem.: Für $f \in \mathcal{O}(K_{0,R}(a))$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ gilt:

- a ist hebbare Sing. $\iff$ $c_k = 0 \ \forall k < 0$
  ("Hauptteil $= 0$")

- a ist Polstelle der Ordnung $\nu \geq 1$ $\iff$ $c_{-\nu} \neq 0$ und $c_k = 0 \ \forall k \leq -\nu$
  ("Hauptteil ist Summe $\neq 0$, keine echte Reihe")

- a ist essentielle Sing. $\iff$ $\exists (k_n)_{n \geq 1}$, $k_n \to \infty$ mit $a_{-k_n} \neq 0 \ \forall n$
  ("Hauptteil bricht nicht ab")

Bsp.: $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{|k|!} z^k$ hat in 0 eine essentielle Sing.

Diese Woche: Noch mehr Anwendungen der Laurentreihenentwicklung.

1. Anwendung: Mittag-Leffler.

Naive/Vereinfachte Fragestellung: Gegeben $\overset{\text{abg.+ diskret}}{P} \subset \mathbb{C}$, gibt es $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P)$, s.d. f in jedem $p \in P$ einen Pol oder eine essentielle Sing. hat?

Naiver Ansatz:
Wenn P endlich ist, so können wir

$$f(z) = \sum_{p \in P} \frac{1}{z - p} \quad \text{oder} \quad f(z) = \sum_{p \in P} \exp\left(\frac{1}{z-p}\right) \quad \text{oder} \ \ldots$$

nehmen. Geht das auch, wenn $|P| = \infty$? Konvergenz?!

Außerdem sagen wir bisher nichts darüber, wie die Laurent-Reihe von f um p aussieht.

Satz: (Mittag-Leffler)
Sei $P \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge.
Für jedes $p \in P$ sei eine Laurentreihe f_p mit Entwicklungspkt. p gegeben, die auf $K_{0,\infty}(p) = \mathbb{C} \setminus \{p\}$ konvergiert.
Dann gibt es $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P)$, die an allen $p \in P$ denselben Hauptteil hat wie f_p.

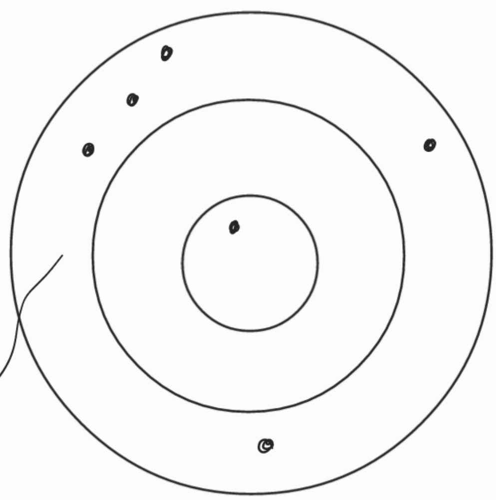
Bem.: Es gibt allgemeinere Versionen, z.B. $P \subset U \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$ abg., diskret und wir fragen nach $f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$.

Beweis von Mittag-Leffler:

Falls $|P| < \infty$, so können wir einfach $f(z) = \sum_{p \in P} f_p(z)$ nehmen.

Falls $|P| = \infty$, sei h_p der Hauptteil von f_p. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n := \sum_{n \le |p| < n+1} h_p \qquad (\text{o.E. } 0 \notin P)$$



in jedem $B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)$
nur endl. viele $p \in P$

$\Longrightarrow \quad S_n \in \mathcal{O}(B_n(0))$

$\Longrightarrow$ können S_n auf $B_n(0)$ in eine Potenzreihe entwickeln.

Finde also für jedes $n \geq 1$ ein Polynom Q_n mit

$$\forall z \in B_n(0): \quad |S_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n} \qquad (*)$$

Definiere $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (S_n(z) - Q_n(z))$.

$\rightsquigarrow$ z.z. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus P)$ (dann sind wir fertig, da die Polynome Q_n nichts an den Hauptteilen in $p \in P$ ändern!)

$\Uparrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} (S_n(z) - Q_n(z))$ konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus P$ kompakt

Wir zeigen also das hier: Sei $f_m(z) := \sum_{n=1}^{m} (S_n(z) - Q_n(z))$.

Sei $\overline{B_R(0)}$ und $m > R+1$ ($\rightsquigarrow \overline{B_R(0)} \subset B_m(0)$).

Für $z \in \overline{B_R(0)}$ gilt dann:

$$|f(z) - f_m(z)| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (S_n(z) - Q_n(z)) \right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{n=m+1}^{\infty} |S_n(z) - Q_n(z)|$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} = 2 - \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1 - 1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \longrightarrow 0, \quad m \to \infty$$

$\overline{B_R(0)} \subset B_n(0)$

$\square$

2. Anwendung: Der Residuensatz.

Motivation/Frage: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ endlich, $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \setminus P$ geschlossener Weg, der in U zusammenziehbar ist. Wie können wir $\int_\gamma f(z)\, dz$ für $f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$ einfach berechnen?

Bem.: (1) $P = \emptyset$ (d.h. $f \in \mathcal{O}(U)$) $\xRightarrow[\text{Integralsatz}]{\text{Cauchy-}}$ $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(2) $\int_{\gamma_-} = - \int_\gamma$, also muss es eine Rolle spielen, wie γ durchlaufen wird.

(3) Sei $p \in P$ und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-p)^k$ auf $\overline{K_{0,R}(p)} \subset U \setminus P$, $R \in \mathbb{R}$. Der Beweis des Satzes über die Laurent-Entwicklung zeigt

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_R(p)} f(z)\, dz.$$

Die Koeffizienten c_{-1} scheinen also eine besondere Rolle zu spielen...

Wir präzisieren zunächst (2):

Satz und Definition: Sei $p \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ ein geschlossener Weg. Dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$, s.d. γ frei homotop zu $[0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$, $t \longmapsto p + \exp(2\pi i n t)$ ist.

Konkret ist

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p}\, dz.$$

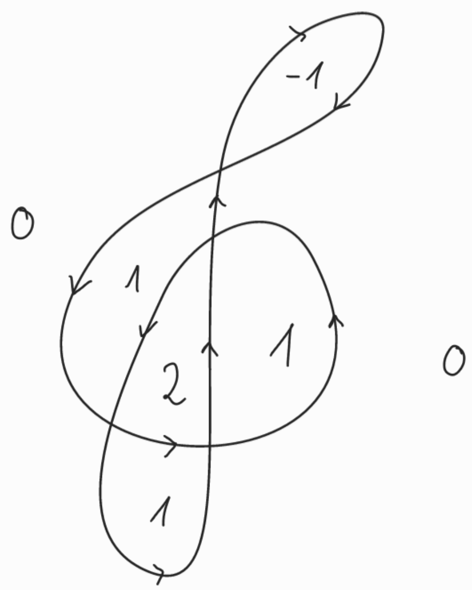
Die Zahl n heißt die <u>Umlaufzahl</u> oder <u>Windungszahl</u> $\mathrm{Um}(\gamma, p)$ von γ um p.

<u>Anschauung / Topologie:</u> Die Umlaufzahl zählt, wie oft γ den Punkt p entgegen des Uhrzeigersinns umläuft. Hierbei werden Umrundungen im Uhrzeigersinn mit -1 gezählt. In der Topologie schreibt man „$\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{p\}) \cong \mathbb{Z}$".

<u>Graphische Berechnung:</u> $Um(\gamma, p)$ hängt nur von der Zusammenhangskomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ab, in der sich p befindet.

<u>Regel 1:</u> Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ist die Umlaufzahl $=0$.

<u>Regel 2:</u> Die Windungszahl „benachbarter Zshgs.komp." unterscheidet sich um 1 (wenn γ einmal durchlaufen wird), wobei die größere Zahl in Fahrtrichtung links liegt.

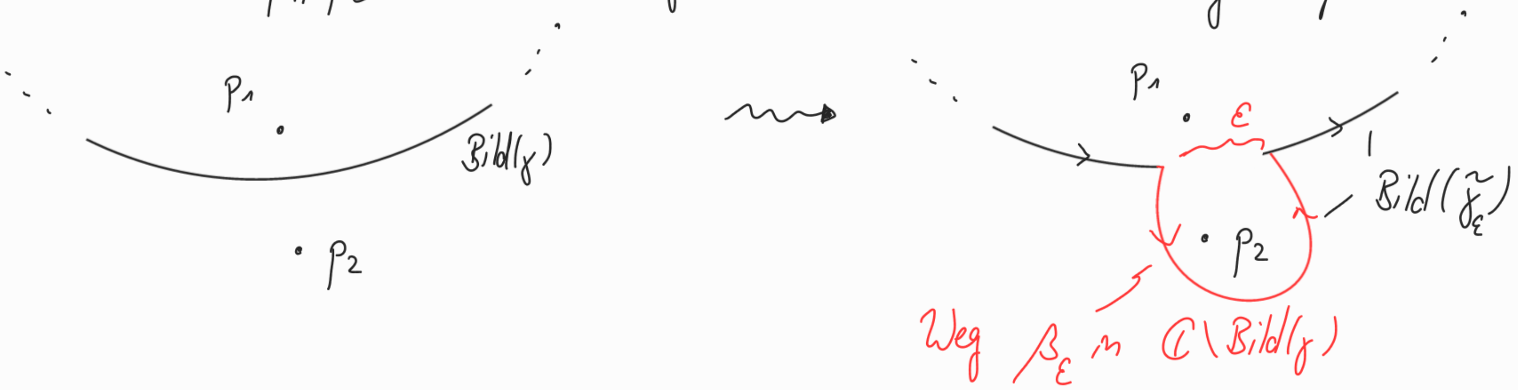


<u>Begründung:</u> • $Um(\gamma, \cdot): \mathbb{C}\setminus Bild(\gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig (Satz über parameterabh. Integrale) $\xRightarrow{\mathbb{Z} \text{ diskret}}$ auf jeder Zshg.skomp. von $\mathbb{C}\setminus Bild(\gamma)$ ist $Um(\gamma, \cdot)$ konstant.

• γ ist in $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ zusammenziehbar, falls p in der unbeschränkten Zshgs. komp. von γ liegt.

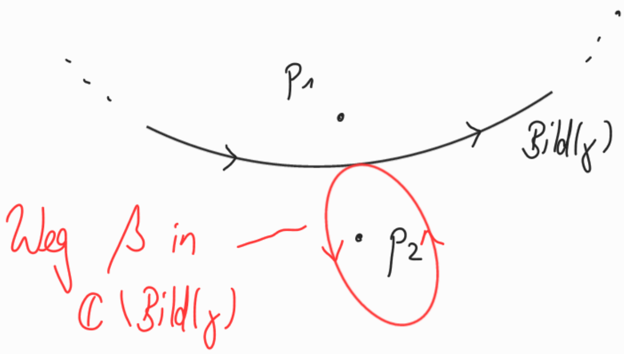
$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Integralsatz}}{\Longrightarrow}} \int_\gamma \frac{1}{z-p}\,dz = \mathrm{Um}(\gamma,p) = 0 \qquad (\Rightarrow \text{Regel 1})$$

- Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$ in benachbarten Zshgs. Komp.



$$\Longrightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Um}(\gamma,\, p_1)}}{\mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_1)} = \mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_2)$$

$\mathrm{Um}(\tilde{\gamma}_\varepsilon, p_2)$ hängt nicht von ε ab.



β ist in $\mathbb{C} \setminus \{p_2\}$ frei homotop zu $B_r(p_2)$ oder $B_r(p_2)_-$.

$$\Longrightarrow \int_\beta \frac{1}{z-p_2}\,dz = \int_{\substack{B_r(p_2) \\ \text{oder } B_r(p_2)_-}} \frac{1}{z-p_2}\,dz$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Integralformel}}{=}} \pm 2\pi i.$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Um}(\tilde{\gamma}, p_2) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\int_{\gamma} \frac{1}{z - p_2} \, dz + \int_{\beta} \frac{1}{z - p_2} \, dz \right)$$

$$= \mathrm{Um}(\gamma, p_2) \pm 1$$

$\Longrightarrow$ Regel 2. $\square$