Entwicklung in Potenzreihen

<u>Erinnerung</u>: Gegeben Kreisscheibe $B_r(0)$ und $f \in \mathcal{O}(B_r(0))$, dann wähle $0 < \rho < r$ und schreibe für alle $w \in B_\rho(0)$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{z - w} \, dz$$

Schreibe $\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - w/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum \left(\frac{w}{z}\right)^i$

setze ein, erhalte Potenzreihendarstellung von f.

<u>Ziel heute</u>: So etwas auch machen für holomorphe Funktionen auf $B_r(0)$, die bei 0 eine Singularität haben.

Sogar noch allgemeiner: für Funktionen auf Kreisringen.

<u>Notation</u> Seien reelle Zahlen $0 < r < R$ gegeben und $p \in \mathbb{C}$. Dann sei

$$K_{r,R}(p) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - p| < R \}$$

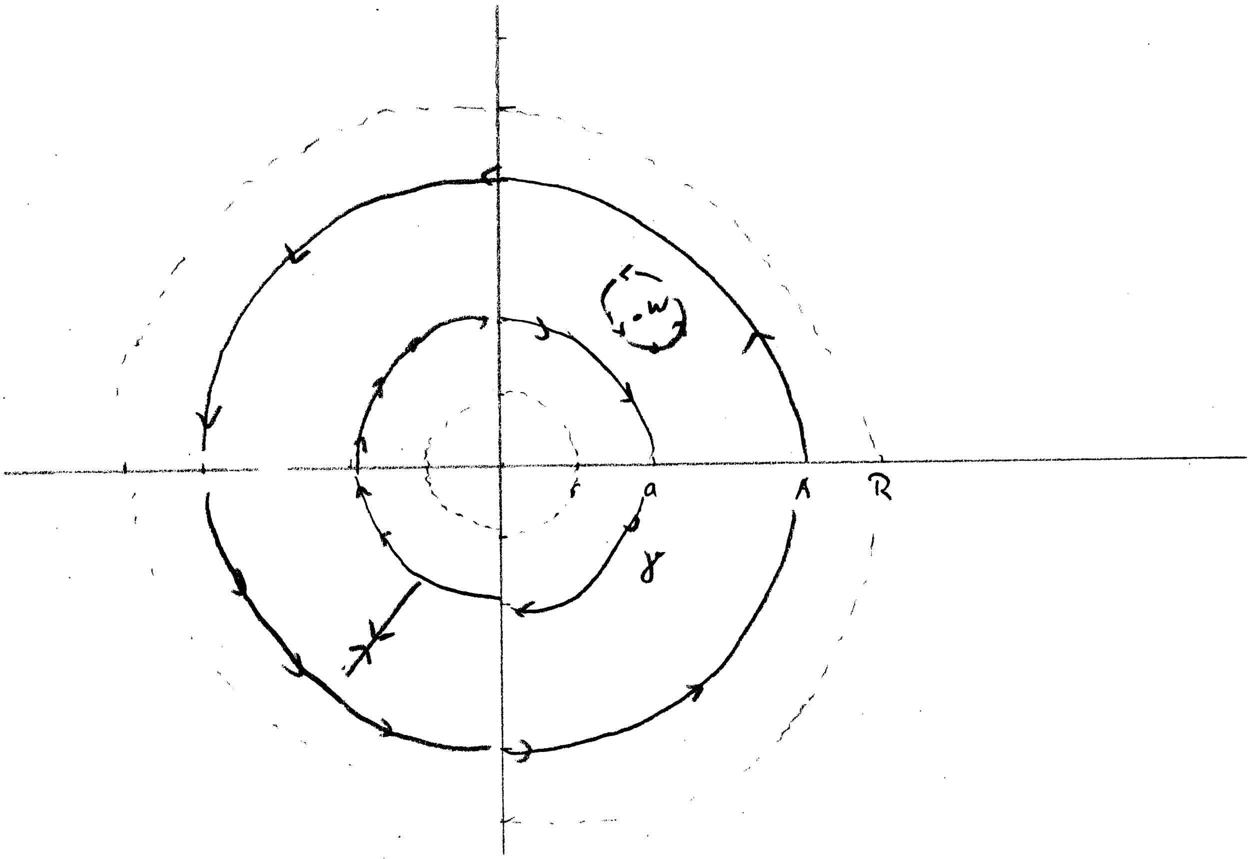
der offene Kreisring um p mit Radien r und R.

Situation heute: Es seien Zahlen $0 < r < R$ und $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(0))$ gegeben.

Konstruktion: Gegeben ein Punkt $w \in K_{r,R}$, dann wähle Zahlen

$$r < a < |w| < A < R$$

und betrachte folgenden Weg γ in $K_{r,R}(0)$



Wesentliche Beobachtung:

1) γ ist in $K_{r,R}(0)$ frei homotop zum Weg im Gegenuhrzeigersinn um $B_\varepsilon(w)$

Insbesondere ist

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \cdots \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial B_A(0)} \cdots - \int_{\partial B_a} \cdots \, dz \right]$$

Jetzt machen wir denselben Trick noch 2x.

1) Für alle $z \in \partial B_A(0)$ und alle $w \in K_{r,A}(0)$ ist

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{z} \cdot \sum \left(\frac{w}{z}\right)^i$$

und

$$\int_{\partial B_A(0)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_A(0)} \frac{f(z)}{z^{i+1}}\, dz \right) \cdot w^i$$

2) Für alle $z \in \partial B_a(0)$ und alle $w \in K_{a,R}(0)$ ist

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{-f(z)}{w-z} = \frac{-f(z)}{w} \, \frac{1}{1-z/w} = \frac{-f(z)}{w} \sum \left(\frac{z}{w}\right)^i$$

und

$$\int_{\partial B_a(0)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\int_{\partial B_a} (-f(z)\, z^i)\, dz \right) \cdot w^{-(i+1)}$$

Wie zuvor gilt: Die Werte der Integrale hängen nicht von der Wahl von a und A ab.

Die Reihen konvergieren auf $K_{r,R}(0)$ kompakt.

<u>Zusammenfassung</u>: Es gibt Zahlen $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, sodass

$\forall w \in K_{r,R}(0)$ gilt:

$$f(w) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i w^i + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{-(i+1)} w^{-(i+1)}$$

Beide Reihen konvergieren auf $K_{r,R}(0)$ kompakt.

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=-n}^{n} \alpha_i w^i$$

<u>Notation</u> Eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt p ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i (z-p)^i$$

kompl. Zahlen.

Man sagt, die Laurentreihe konvergiert für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ ($z_0 \neq p$) gegen $g \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $\sum_{i=-n}^{n} c_i (z_0 - p)^i$ gegen g konvergiert.

Man sagt, die Laurentreihe konvergiert auf einer Menge $M \subset \mathbb{C} \setminus p$ kompakt, wenn die Folge der Partialsummen kompakt konvergiert.

Gegeben eine Laurent-Reihe, so nennt man die Teilreihe

$$\sum_{i=-1}^{-\infty} c_i (z-p)^i \quad \text{den Haupt-Teil}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-p)^i \quad \text{den Nebenteil.}$$

<u>Satz</u> Sei $p \in \mathbb{C}$ und $0 < r < R$ und $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(p))$.

Dann existiert eine auf ganz $K_{r,R}(p)$ kompakt konvergierende Laurent-Reihe $\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i (z-p)^i$, deren Grenzfkt mit f übereinstimmt.

<u>Zusatz</u> Haupt- und Nebenteil konvergieren auf $K_{r,R}(p)$ jeweils kompakt. □

<u>Beobachtung</u> In der Situation des Satzes sei $r < a < R$.

Dann ist $\forall n$

$$\int_{\partial B_a(p)} f(z) (z-p)^n \, dz = \int_{\partial B_a(p)} \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{i=-k}^{k} c_i (z-p)^i \right) (z-p)^n \, dz$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int \sum_{i=-k}^{k} c_i (z-p)^{i+n} \, dz = 2\pi i \cdot c_{-1-n}$$

Konsequenz: Die Darstellung als Laurent-Reihe ist eindeutig!

Anwendung auf holomorphe Funktionen mit Singularitäten

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f eine holomorphe Funktion auf U mit isolierten Singularitäten, sei $T \subset U$ die Menge der Singularitäten und sei $p \in T$ eine konkrete Singularität.

1) Entwickle f bei T in eine Laurentreihe: wähle $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(p) \cap T = p$, schreibe

$$f\big|_{K_{1/2\,\varepsilon,\varepsilon}(p)} \in \mathcal{O}\left(K_{1/2\,\varepsilon,\varepsilon}(p)\right)$$

als Laurent-Reihe $\sum c_i (z-p)^i$

2) Dann stelle fest

a) p ist hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ Haupt-teil $= 0$

b) p ist Polstelle $\Leftrightarrow$ Hauptteil ist endlich

c) p ist wesentl. Sing $\Leftrightarrow$ Hauptteil hat ∞ viele Summanden.

Anwendung: Was sind die biholomorphen Selbstabb. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

1) Abbildungen der Art $z \mapsto a \cdot z + b$, ganz klar.

2) Polynome von Grad ≥ 2 bestimmt nicht, denn jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ zerfällt in Linearfaktoren

$$f(z) = \lambda \cdot (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$$

- Wenn alle a_n gleich sind: $f = \lambda \cdot (z - a_1)^n$ ... ist bestimmt nicht injektiv
- Wenn die a_n unterschiedlich sind: f hat unterschiedliche Nullstellen, auch nicht injektiv.

3) Potenzreihen $f(z) = \sum a_i z_0^i$ mit Konvergenzradius ∞.

Kann eine solche Potenzreihe auftreten? Falls ja, können wir OE annehmen, dass $a_0 = 0$ ist, also $f(0) = 0$.
Insbesondere bildet f die Menge $\mathbb{C}^*$ biholomorph auf sich selbst ab.

Aber: $\mathbb{C}^*$ hat einen interessanten Automorphismus, nämlich $j: z \mapsto z^{-1}$. Die Abb. $f \circ j: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ist dann auch holomorph & bijektiv, und kann als hol. Fkt mit Pol bei 0 aufgefasst werden. Die ~~Potenzrei~~

Laurent-Reihe ist

$$f\circ j(z) = \sum a_i z^{-i}$$

also ist der Hauptteil ∞, also liegt eine wesentliche Sing. vor.

Dann kann $f\circ j$ aber nicht bijektiv sein!

Warum? Betrachte $B_{1/2}(1) \subset \mathbb{C}^*$. Wissen: die Bildmenge

$$f\circ j(B_{1/2}(1)) =: W$$ ist offen.

Es ist aber nach Casorati-Weierstraß

$$f\circ j(B_{1/2}(0) \setminus 0)$$

dicht, schneidet also W $\leadsto$ min ein Wert von W hat zwei Urbildpunkte in $B_{1/2}(1)$ und $B_{1/2}(0)\setminus 0$.

$\leadsto$ $f\circ j$ ist nicht injektiv!

<u>N.B.</u> Wir haben in Wirklichkeit gezeigt, dass hol. Fkt mit ess. Singularitäten niemals injektiv sind.

Also sind alle Automorph. von $\mathbb{C}$ von der Form $z \mapsto az+b$