3) $f(z) = \exp(1/z)$. Echt übel. Man rechne nach:

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $z^n \cdot \exp(1/z)$ in der Nähe von 0

betragsmäßig unbeschränkt (dazu reicht es, reelle z zu betrachten)

So etwas nennen wir eine wesentliche Singularität.

Definition Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten ist eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus T)$

wobei $T \subset U$ eine diskrete Menge ist.

Gegeben ein Punkt $p \in T$, dann gibt es 3 Fälle

1) $\exists \bar{f} \in \mathcal{O}(U \setminus T \cup p) : \bar{f}|_{U \setminus T} = f$

in diesem Fall sagt man, f hat bei p eine „hebbare Sing".

2) f hat bei p keine hebbare Singularität, aber $\exists n \in \mathbb{N}$:

$(z-p)^n \cdot f(z)$ hat hebbare Sing. In diesem Fall

sagt man, „f hat eine Polstelle bei p". Das minimale

n heisst „Polstellenordnung von f am Punkt p".

3) Alle anderen Singularitäten heissen „wesentlich".

An ihren Beträgen sollt ihr sie erkennen ...

<u>Hebbarkeitssatz von Riemann</u> Bleibt eine holomorphe Funktion in der Nähe einer Singularität betragsmäßig beschränkt, so liegt eine hebbare Singularität vor.

Genauer: sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U \setminus T)$ eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten, wie in def. Sei $p \in T$.

Falls es $\varepsilon > 0$, $M > 0$ gibt: $\forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus T$: $|f(z)| < M$, dann hat f bei p eine hebbare Singularität.

<u>Beweis</u> Nach Verkleinern von U können wir OE annehmen, dass U eine Kreisscheibe um p ist und das p der einzige Punkt von T ist. Betrachte die Funktion

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} f(z) \cdot (z-p) & z \neq p \\ 0 & z = p. \end{cases}$$

per Annahme ist diese Fkt stetig, und auf $U \setminus p$ holomorph.

$\Rightarrow$ φ ist auf ganz U holomorph.

VL 25Mai

Weil φ aber bei p eine Nullstelle hat, finden wir

$g \in \mathcal{O}(U)$ sodass $\varphi = (z-p) \cdot g(z)$ ist (Potenzreihenentwicklung!)

Die Funktionen g und f sind aber gleich! $\square$

<u>Beachte:</u> Die Aussage ist in der reellen Analysis fürchterlich falsch. Betr. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \mapsto |\vec{v}|$. Die Abb. ist stetig und außerhalb von 0 diff'bar. Aber auf ganz $\mathbb{R}^2$ überhaupt nicht diff'bar.

Was kann ich über Beträge von Funktionen mit Polstelle sagen? Dazu eine Beispielrechnung: Sei f eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, die am Punkt $p \in U$ einen Pol der Ordnung $n > 0$ hat. Also gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(p) \subset U$ und

$g(z) = (z-p)^n \cdot f(z)$ auf $B_\varepsilon(p)$ holomorph ist, $g(p) \neq 0$.

Wenn ich ε verkleinere, kann ich annehmen, dass

$$|g(z)| > \tfrac{1}{2} |g(p)| \quad \text{ist } \forall z \in B_\varepsilon(p).$$

Also $\frac{1}{2} |g(p)| < |g(z)| = |z-p|^n \cdot |f(z)| < \varepsilon^n \cdot |f(z)|$

für alle $z \in B_\varepsilon(p) \setminus p$.

<u>Konsequenz:</u> hat f bei p eine Polstelle, dann gilt für alle ausreichend kleinen $\varepsilon > 0$:

1) $B_\varepsilon(p) \subset U$ und p ist die einzige Singularität von f auf $B_\varepsilon(p)$

2) $\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in B_\varepsilon(p) \setminus p : \quad |f(z)| > M$.

Die Funktionswerte explodieren Betragsmäßig, wenn ich mich dem Punkt p annähere. Auf jeden Fall sind die Funktionswerte von 0 weg beschränkt.

DAS IST BEI WESENTLICHEN SINGULARITÄTEN GANZ ANDERS!

Satz: (Casorati - Weierstraß) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei f eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten entlang T. Falls f eine wesentliche Singularität besitzt, dann ist $f(U \setminus T) \subset \mathbb{C}$ dicht.

Anwendungsidee Wenn $p \in U$ eine wesentliche Sing. ist, dann gilt $\forall \varepsilon > 0$: $f(B_\varepsilon(p) \cap U \setminus T) \subset \mathbb{C}$ ist dicht. Die Funktionswerte sind also in der Nähe von ~~$\emptyset$~~ p kein bisschen von 0 weg beschränkt ~ ganz im Gegensatz zum Verhalten von Funktionen mit Polstellen.

Beweis Wir beweisen die Kontraposition: angenommen, $f(U \setminus T) \subset \mathbb{C}$ wäre nicht dicht. Dann gibt es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(z_0) \cap f(U \setminus T) = \emptyset$ ist.

Betrachte ich die Funktion $f - z_0$, dann gilt für alle $z \in U \setminus T$: $|f(z) - z_0| > \varepsilon$, ~~oder~~

~~[illegible]~~

Sei $N \subset U \setminus T$ die Nullstellenmenge der Funktion $f - z_0$.
Weil $f \not\equiv z_0$ ist, ist diese ebenfalls diskret. Die Vereinigung diskreter Mengen ist diskret, also ist $N \cup T$ diskret. Jetzt betrachte ich $\frac{1}{f - z_0} \in \mathcal{O}(U \setminus (N \cup T))$

und stelle fest: die Beträge dieser Funktion sind nach oben beschränkt durch $\frac{1}{\varepsilon}$, also sind alle Singularitäten hebbar und es gibt eine holomorphe $h \in \mathcal{O}(U)$ sodass

$$\frac{1}{f - z_0} = h|_{U \setminus (N \cup T)}$$

Es folgt direkt, dass $f = h^{-1} + z_0$ nur Polstellen und keine wesentlichen Singularitäten hat.

(*) oops: habe übersehen: aus

$|f(z) - z_0| > \varepsilon \quad \forall z$ folgt $N = \emptyset$.