Anwendung: Wurzeln holomorpher Funktionen Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Ang. f hat bei $p \in U$ eine Nullstelle von Ordnung n, mit $1 \leq n < \infty$. Dann gibt es eine Umgebung $V = V(p) \subset U$ und eine Funktion $b \in \mathcal{O}(V)$ sodass folgendes gilt

1) $\forall z \in V: \quad f(z) = b(z)^n$.

2) $W := b(V) \subset \mathbb{C}$ ist offen und $b: V \to W$ ist biholomorph.

Beweis Wir betrachten nur den Fall, dass $p \in \mathbb{C}$ der Nullpunkt ist.

Falls $n=1$, dann zeigt das vorhergehende Lemma, dass wir $b = f$ setzen können.

Sei also $n > 1$. Wir haben schon gesehen: auf einer geeigneten Kreisscheibe D um $p = 0$ gibt es eine Funktion g, so dass $f(z) = z^n \cdot g(z)$ ist, wobei $g(0) \neq 0$.

~~Nachdem wir die Kreisscheibe ggfs.~~ Also gibt es offene Umgebung $\tilde{W} = \tilde{W}(g(0)) \subset \mathbb{C}$, sodass auf $\tilde{W}$ eine n-te Wurzelfunktion existiert $r: \tilde{W} \to \mathbb{C}^*$, $r(w)^n = w$.

<u>Konsequenz:</u> lokal sieht jede Funktion aus wie $z \mapsto z^n$

Präzise Formulierung

<u>Satz über die lokale Struktur holomorpher Funktionen</u>

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Weiter sei $p \in U$ ein Punkt und f sei in der Nähe von p nicht konstant.

Dann gibt es biholomorphe Einbettungen der Kreisscheibe

$u, v : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ sodass$^{(*)}$ $u(0) = p$, $v(0) = f(p)$

und so, dass das folgende Diagramm kommutiert
$\wedge$ $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "z \mapsto z^n"'] & U \arrow[d, "f"] \\
\Delta \arrow[r, "v"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$^{(*)}$ $u(\Delta) \subset U$,

<u>Beweis</u> Wir betrachten die Funktion $f - p$, die am Punkt p eine Nullstelle hat. Sei $n < \infty$ deren Ordnung. Nach dem Satz über die Wurzeln holomorpher Funktionen gibt es eine Umgebung $V = V(p)$ und eine ~~b~~biholomorphe Immersion

$b : V \to W \subset \mathbb{C}$ mit Bildmenge W, sodass $\forall z \in V: \; f(z) - p = b(z)^n$

Wähle $\lambda \in \mathbb{R}^+$, sodass die Menge $\lambda \cdot W = \text{Bild}(\lambda \cdot b)$ den Einheitskreis Δ enthält und setze $U := (\lambda \cdot b)^{-1}(\Delta)$, $u = (\lambda \cdot b)^{-1}$

Dann ist ~~u~~ u eine biholomorphe Abb. $u : \Delta \sim U$ und

$$\forall z \in U: \quad \left(u^{-1}(z) \right)^n = \left(\lambda \cdot b(z) \right)^n = \lambda^n \cdot b(z)^n$$
$$= \lambda^n \cdot \left(f(z) - p \right)^n$$
$$= \left(\sqrt[n]{\lambda} \, (f(z) - p) \right)^n$$

Betrachte

$$v : \Delta \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z}{\sqrt[n]{\lambda}} + p.$$

$\square$

Nachdem wir die Kreisscheibe $\mathcal{D}$ um 0 ggfs verkleinern, können wir annehmen, dass $g(\mathcal{D}) \subset \tilde{W}$ ist. Dann gilt $\forall z \in \mathcal{D}$:

$$f(z) = z^n \cdot r(g(z))^n = [\, z \cdot r(g(z)) \,]^n$$

Jetzt ist klar $[\, z \cdot r(g(z)) \,]'(p)$ ist eine Wurzel von $g(p) \neq 0$, also selbst $\neq 0$. Deshalb sagt das vorhergehende Lemma: es gibt Umgebung $V \subset \mathcal{D}$, sodass $b = z \cdot r(g(z))$ biholomorph auf Bildmenge ist. $\square$

Der Satz erlaubt, jede (nicht-konstante) holomorphe Funktion lokal mit der holomorphen Funktion $z \mapsto z^n$ zu vergleichen. Zum Beispiel ist die Abb. $z \mapsto z^n$ offen (d.h. Bilder offener Mengen sind offen).
Also erhalten wir:

<u>Satz (Satz von der Gebietstreue)</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend.

<u>Beweis</u> Nach dem Satz über die lokale Struktur ist $f(U)$ offen weil die Abb. f offen ist. Aus Analysis wissen wir: Bilder zshgd. Mengen unter stetigen Abb. sind zshgd. $\square$

<u>Notation</u> In der Funktionentheorie nennt man offene, zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{C}$ oft „Gebiete". Der Satz sagt: ist die Funktion nicht konstant, dann sind Bilder von Gebieten selbst wieder Gebiete.

Als Beispielanwendung erhalten wir einen neuen Beweis des Maximumsprinzips. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant. Argumentiere mit Widerspruch und nehme an, es gäbe ein $p \in U$ sodass $|f|$ bei p ein lokales Maximum annimmt. Nach Verkleinern von U können wir OE annehmen, dass $|f|$ bei p ein globales Maximum annimmt.

Aber: $f(U)$ ist offen, $\exists\, \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(f(p)) \subset f(U)$.

Also liegen in $f(U)$ noch Punkte mit größerem Betrag $\lightning$

§ 5 Singuläre Stellen holomorpher Funktionen

§ 5.1 Isolierte Singularitäten

Wir interessieren uns für die folgende Situation: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $p \in U$ ein Punkt. Gegeben eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus p)$. Was kann ich über das Verhalten von $\cancel{\phi}$ f bei p sagen?

Beispiele mit $U = \mathbb{C}$, $p = 0$

1) $f(z) = z \quad \in \mathcal{O}(U \setminus p)$ ist Einschränkung einer holomorphen Funktion, die bereits auf ganz U definiert ist. Die „Singularität" bei p ist „hebbar".

2) $f(z) = 1/z \quad \in \mathcal{O}(U \setminus p)$ ist nicht einmal Einschränkung einer stetigen Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist
(beachte: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$: die Funktion $|1/z|$ ist auf
$B_\varepsilon(0) \setminus 0$ unbeschränkt)
Aber: ganz schlimm ist f auch nicht, denn $z \cdot f(z)$ ist holomorph. Man sagt: f hat bei 0 einen Pol.

3) $f(z) = \exp(1/z)$. Echt übel. Man rechne nach:

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $z^n \cdot \exp(1/z)$ in der Nähe von 0

betragsmäßig unbeschränkt (dazu reicht es, reelle z zu betrachten)

So etwas nennen wir eine. <u>wesentliche Singularität.</u>

<u>Definition</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten ist eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus T)$

wobei $T \subset U$ eine diskrete Menge ist.

Gegeben ein Punkt $p \in T$, dann gibt es 3 Fälle

1) $\exists \ \bar{f} \in \mathcal{O}(U \setminus T \cup p) : \bar{f}|_{U \setminus T} = f$

in diesem Fall sagt man, f hat bei p eine „hebbare Sing".

2) f hat bei p keine hebbare Singularität, aber $\exists \ n \in \mathbb{N}$:

$(z-p)^n \cdot f(z)$ hat hebbare sing. In diesem Fall

sagt man, „f hat eine Polstelle bei p". Das minimale

n heisst „Polstellenordnung von f am Punkt p".

3) Alle anderen Singularitäten heissen „wesentlich".