Korollar Es sei $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und offen, weiter sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Falls $|f|$ ein Maximum hat, dann ist f konstant

Beweis Sei $p \in U$ ein Maximum. Wissen schon: $\exists\, \varepsilon > 0$:

$f|_{B_\varepsilon(p)} \equiv \text{const.} \Rightarrow f - f(p) \in \mathcal{O}(U)$ hat nicht-isolierte Nullstelle, ist also konstant $= 0$. $\square$

Notation Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Weiter sei $p \in U$ gegeben. Schreibe f in der Nähe von p als Potenzreihe

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$$

Die Zahl

$$\cancel{\sup}\ \min\{ i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0 \}$$

heisst Nullstellenordnung von f bei p. Falls die Potenzreihe konstant 0 ist, so hat f bei p unendliche Nullstellenordnung.

Beispielanwendung: Analyse von holomorphen Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe $\Delta := B_1(0)$

Lemma von Schwarz Es sei $f : \Delta \to \Delta$ holomorph und $f(0) = 0$.

Dann gilt $\forall z \in \Delta: \quad |f(z)| \leq |z|$.

Zusatz: wenn $z \in \Delta \setminus \{0\}$ existiert mit $|z| = |f(z)|$, dann ist f eine Drehung ($=$ mult. mit kompl. Zahl $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Beweis Wenn $f \equiv 0$ ist, ist alles klar. Also sei f nicht die Nullfunktion, sodass 0 eine isolierte Nullstelle ist.

Schreibe dann $f(z) = z \cdot g(z)$, wo $g \in \mathcal{O}(\Delta)$.

Dann klar: $\forall \varepsilon > 0: \quad |z| > \dfrac{1}{1+\varepsilon} \Rightarrow |g(z)| < 1 + \varepsilon$

$\dfrac{|f(z)|}{|z|} < 1$

Falls die Funktion $|g|$ jemals einen Wert > 1 annimmt, muss das auf der abgeschlossenen / kompakten Menge $\overline{B_{1/(1+\varepsilon)}(0)}$ passieren.(*) Dort nimmt $|g|$ dann aber sogar ein Maximum an, also muss $|g|$ konstant sein ↯

(*) für $\varepsilon \ll 0$.

Falls die Funktion $|g|$ jemals den Wert $=1$ annimmt, muss das das Maximum sein! Dann ist g aber konstant. $\square$

<u>Lemma von Schwarz, Teil II</u> Es sei $f: \Delta \to \Delta$ holomorph und

$f(0)=0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$.

<u>Zusatz:</u> wenn $|f'(0)|=1$ ist, dann ist f eine Drehung.

<u>Beweis</u> genau wie oben. Beachte, dass $g(0)=f'(0)$. $\square$

Warum interessiert mich das?

<u>Antwort:</u> Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen. Eine hol. Abb. $\varphi: U \to V$ heisst biholomorph, wenn φ bijektiv ist und die Umkehrabb. auch wieder holomorph.

Gegeben eine offene Menge U, dann bilden die biholomorphen Selbstabbildungen („Automorphismen") $U \to U$ eine Gruppe: die Identität ist das neutrale Elt, hintereinander-Ausführung ist die Gruppenverknüpfung und die Umkehrabb. ist das Inverse.
Um die holomorphe Geometrie von U zu verstehen, interessiere ich mich für die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(U)$.

Beispiel Kreisscheibe

- Einige Automorphismen sehe ich direkt: Drehungen, d.h. Mult. mit $\exp(i\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.
- Andere Automorphismen sieht man nicht sofort: $\forall\ \alpha \in \Delta$ ist

$$g_\alpha : z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$$ ein Automorph. mit

  - $g_\alpha(0) = \alpha, \quad g_\alpha(\alpha) = 0$
  - $g_\alpha \circ g_\alpha = \mathrm{Id}.$

Gegeben irgendeinen Automorphismus $\varphi : \Delta \to \Delta$, dann setze $\alpha := \varphi(0)$ und betrachte $\psi := g_\alpha \circ \varphi$. Dies ist ein Automorphismus, der 0 auf 0 abbildet. Das Lemma von Schwarz sagt, wieviele solche Automorph. es gibt: nur Drehungen.

$\rightsquigarrow$ jeder Automorph. von Δ ist Komposition von Drehung und g_α. Kommt Ihnen das bekannt vor?

<u>Frage:</u> Sind $\mathbb{C}$ und Δ biholomorph? Antwort: nein!

$\rightsquigarrow$ Satz von Liouville.

§ 4.4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

Erinnerung / ~~Sa~~ Prop. 2.2.10 von Soergel

Lemma: Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Weiter sei $p \in U$ sodass $f'(p) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V = V(p) \subset U$ sodass $f|_V : V \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Einbettung ist. erklären

Das bedeutet: $W := \operatorname{img}(f|_V) = f(V) \subset \mathbb{C}$ ist offen, $f|_V : V \to W$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion ist holomorph.

Beweis Haben wir schon gemacht.

- Wir wissen: f ist ∞ oft ~~holomorph~~ komplex diff'bar. Insbesondere ist f' stetig und es gibt Umgebung von p wo $f' \neq 0$ ist.
- Analysis („Satz über lokale Umkehrbarkeit"): es gibt $V = V(p)$, sodass $W := \operatorname{Bild}(f|_V)$ offen und $f|_V : V \to W$ bijektiv ist. Ausserdem: $\forall z \in V: f'(z) \neq 0$.
- Prop. von ~~AS~~ 04 May / Prop. 2.2.10 von Soergel: die Umkehrfunktion ist wieder holomorph. $\square$

Nebenbemerkung / Erinnerung an Anwendung: Jeder Punkt aus $\mathbb{C}^\times$ hat eine Umgebung, wo eine Wurzelfunktion existiert.