Beispiel für eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0

1) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$ ... kennen wir schon. Die Exponentialfunktion.

Der Konvergenzradius ist ∞.

2) $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$ ... kennen wir auch schon. Aus Analysis I wissen wir: Reihe konvergiert für reelle z mit $|z|<1$. Für $z=1$ konvergiert die Reihe nicht. Also ist der Konvergenzradius $= 1$

Wie in Analysis I rechnet man nach: $\forall z \in B_1(0)$: Reihe konvergiert gegen $\frac{1}{1-z}$

$$\ulcorner \quad (1-z)\cdot \sum_{i=0}^{n} z^i = 1 - z^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \lrcorner$$

__Proposition__ Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, $f_i \in \mathcal{O}(U)$, die auf U kompakt gegen Grenzfunktion f konvergiert. Dann

1) $f \in \mathcal{O}(U)$

2) Die Folge $(f_i')_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen f'

__Beweis 1__ Die kompakte Konvergenz (= lokal gleichmäßige Konvergenz) garantiert schon einmal, dass f stetig ist. Super. Wenn $R \subset U$ ein Achsenparalleles Rechteck ist, dann ist

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz \underset{\substack{\partial R \text{ kompakt,} \\ \text{kompakte Konvergenz}}}{=} \lim_{i \to \infty} \underbrace{\int_{\partial R} f_i(z)\, dz}_{\substack{=0 \\ \text{(Morera)}}} = \lim 0 = 0$$

Also ist f nach dem Satz von Morera bereits holomorph. $\square$

Bewis 2 Es sei $z_0 \in U$. Wähle ein $r \in \mathbb{R}^+$, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ ist. Dann wissen wir schon: $\forall\, w \in B_r(z_0)$

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz \text{ ; ebenso mit } f_i'.$$

Betrachte Abb

$$\varphi : \partial B_r(z_0) \times B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z, w) \mapsto \frac{f(z)}{(z-w)^2}$$

ebenso φ_i. Dann ist klar: auf $\partial B_r(z_0) \times \overline{B_{1/2 \cdot r}(z_0)}$ konvergiert φ_i gleichmäßig gegen φ. Also konvergiert f_i' auf $\overline{B_{1/2 \cdot r}(z_0)}$ gleichmäßig gegen f'.

Klar: Jedes Kompaktum $K \subset U$ ist von endlich vielen komp. Kreisscheiben überdeckt, auf denen f_i' gleichmäßig gegen ~~f~~ f' konvergiert, also liegt kompakte Konvergenz vor. □

<u>Konsequenz</u> Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt p und Konvergenzradius $r > 0$.

Weiter sei $f : B_r(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ die zugehörige Funktion.

Dann ist f holomorph

Dann ist der Konvergenzradius von $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i (z-p)^{i-1}$ mindestens r und die zugehörige Funktion ist f'.

Proberechnung. Es sei $r > 0$ und es sei $f \in \mathcal{O}(B_r(0))$.

Wenn $\rho < r$ eine pos. Zahl ist, dann ist $\forall\ w \in B_\rho(0)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz$$

Witz: wenn $z \in \partial B_\rho(0)$ und $w \in B_\rho(0)$ gegeben sind, schreib

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \underbrace{w/z}_{\text{Betrag } < 1}} \right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^i$$

Also: $\forall\ w \in B_\rho(0)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{z} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^i \right) dz$$

komp. Konv.

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{z^{i+1}} \cdot w^i\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{z^{i+1}}\, dz \right)}_{= a_i.} \cdot w^i$$

Beobachte: Nach dem Integralsatz von Cauchy hängen die Zahlen a_i gar nicht von der Wahl von ρ ab!

Der Gleichung

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{\infty} a_i w^i \qquad (*)$$

gilt also für alle $w \in B_r(0)$. Insbesondere ist der Konvergenzradius von $(*)$ mindestens gleich r.

Das funktioniert natürlich nicht nur bei Kreisscheiben um den Nullpunkt.

<u>Satz:</u> Es sei $B_r(p) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $f \in \mathcal{O}(B_r(p))$. Dann kann f auf ganz $B_r(p)$ als Potenzreihe dargestellt werden.

<u>Genauer:</u> Es existiert Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$ mit Entwicklungspunkt p und Konvergenzradius $\geq r$, sodass $\forall z \in B_r(p)$ die Gleichung $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$ gilt. $\square$

<u>Bemerkung:</u> Umkehrung gilt auch: Funktionen, die als Potenzreihen dargestellt werden können, sind holomorph.

Frage: Gegeben $f \in \mathcal{O}(B_r(p))$. Wie komme ich an die Darstellung von f als Potenzreihe? Muss ich wirklich $\rho < r$ wählen und $\int_{\partial B_\rho(r)} \frac{f(z)}{z^i} dz$ ausrechnen?

Antwort: Aber nein!! Wenn ich schon sicher bin, dass es eine Darstellung gibt, $f(z) = \sum a_i (z-p)^i$, (*)

dann ist $a_0 = f(p)$. Ausserdem haben wir bewiesen:

f' hat die Darstellung $f'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \, (z-p)^{i-1}$

also $a_1 = f'(p)$. ... insgesamt: $\forall i \in \mathbb{N}: \; a_i = \frac{f^{(i)}(p)}{i!}$

Die Darstellung (*) ist also einfach die aus Ana I bekannte Taylor-Reihe (= Maclaurin series).

Insbesondere ist die Potenzreihenentwicklung eindeutig

__Bemerkung:__ Manchmal tritt folgende Situation auf:

gegeben eine Kreisscheibe $B_r(p)$ und $f \in \mathcal{O}(B_r(p))$.

Dann schreibe ich f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt p

und stelle fest, dass der Konvergenzradius $R > r$ ist.

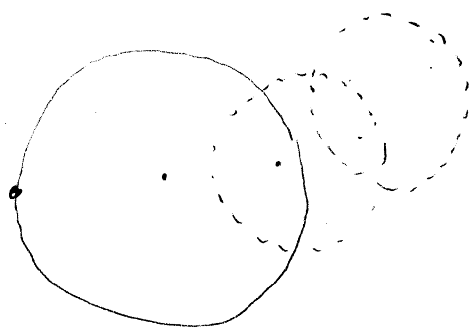
In dieser Situation ist klar, dass ich f ~~auf~~ zu einer

holom. Fkt. auf $B_R(p) \supsetneq B_r(p)$ fortsetzen kann.

Falls $r = R$ ist, dann ist klar, dass ich f niemals

auf eine größere Kreisscheibe fortsetzen kann!

Das führt zu interessanten Situationen!



§ 4.3 Nullstellen von holomorphen Funktionen

__Situation__ Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und

$Z = \{ z \in U \mid f(z) = 0 \}$. Die Menge $Z \subset U$ ist

~~abg~~ abgeschlossen. Was können wir sonst noch

sagen?

__Probierechnung:__ Sei $p \in Z$ und sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$ $(*)$

die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt p, Konv.radius $= r$.

Zwei Möglichkeiten

__Typ 1__ alle $a_i = 0$. Dann $\exists\, r > 0$, sodass $B_r(p) \subset U$

ist und $f|_{B_r(p)} \equiv 0$.

__Typ 2__ nicht alle $i = 0$. Sei $n = \min\{ i \mid a_i \neq 0 \}$,

nenne n die „Ordnung der Nullstelle". Schreibe

$$f(z) = \cancel{\sum_{i=n}^{\infty}}$$

$$= (z-p)^n \cdot \underbrace{\sum_{i=n}^{\infty} a_i (z-p)^{i-n}}_{= (**)}$$

Nachrechnen: die Potenzreihe (**) hat ebenfalls

Konvergenzradius r, definiert also Funktion $g \in \mathcal{O}(B_r(p))$

die aber bei p keine Nullstelle hat (... und in einer

ausreichend kleinen Umgebung von p ebenfalls nicht).

Auf $B_r(p)$ gilt die Gleichung

$$f(z) = (z-p)^n \cdot g(z)$$

und $\exists\ \varepsilon > 0 : \ Z \cap B_\varepsilon(p) = \{p\}$.

Man sagt: p ist eine isolierte Nullstelle von f.

Zusammenfassung: Kann die Menge Z zerlegen

$$Z = \underbrace{\text{Typ } 1}_{\text{offen!}} \ \dot\cup \ \underbrace{\text{Typ } 2}_{\text{diskret: abg., jeder Punkt hat } \varepsilon\text{-Umgebung, sodass kein weiterer Punkt in dieser Umg. liegt.}}$$

Konsequenz: Die Menge der Typ 1 - Nullstellen ist offen und abgeschlossen, also eine ganze Zusammenhangskomponente von U!

Zwei unmittelbare Konsequenzen

$f \in \mathcal{O}(U)$

Satz Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Dann äquivalent

1) $Z(f)$ ist nicht diskret („hat Häufungspunkt")

2) $f \equiv 0$. $\square$

Korollar Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$.

Dann äquivalent:

1) Die Menge $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ ist nicht diskret („hat Häufungspunkt")

2) $f \equiv g$. $\square$

Beispiel: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist die einzige holomorphe Funktion, die für reelle Zahlen mit der bekannten Exponentialfunktion übereinstimmt.

<u>Korollar</u> Es sei $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und offen, weiter sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Falls $|f|$ ein maximum hat, dann ist f konstant

<u>Beweis</u> Sei $p \in U$ ein Maximum. Wissen schon: $\exists\, \varepsilon > 0$:

$f|_{B_\varepsilon(p)} \equiv \text{const.} \Rightarrow f - f(p) \in \mathcal{O}(U)$ hat nicht-isolierte Nullstelle, ist also konstant $= 0$. $\square$