<u>Konsequenz (Fundamentalsatz der Algebra)</u> Es sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom ohne Nullstelle. Dann ist f konstant.

<u>Beweis:</u> Wir werden gleich zeigen: $|f|$ ist nach unten beschränkt (d.h. $\exists\ m \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \mathbb{C} : m < |f(z)|$). Dann ist $1/f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ beschränkt und holomorph, also nach dem Satz von Liouville konstant. Also ist f konstant.

Zum Beweis der Beschränktheit schreibe f aus, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot z^i$ mit $a_n \neq 0$. Wähle $0 < \varepsilon \ll |a_n|$. Beobachte: $\exists\ r \in \mathbb{R}^+$ sodass $\forall z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0)$:

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| > |a_n| + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| > |z^n| \cdot (|a_n| - \varepsilon) > r^n (|a_n| - \varepsilon).$$

also gilt $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z)| > \min \Big\{ r^n (|a_n| - \varepsilon),\ \underbrace{\min_{z \in \overline{B_r(0)}} |f(z)|}_{\text{existiert und } > 0} \Big\} \qquad \square$$

Konsequenz Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann äquivalent

1) f ist holomorph

2) Für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset U$ gilt: $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$.

Beweis $1 \Rightarrow 2$ Das ist der Cauchy-Integralsatz, denn der Weg rund um das Rechteck R ist in U nullhomotop.

Beweis $2 \Rightarrow 1$ Holomorphie ist eine lokale Eigenschaft: wir können die Menge U mit Kreisscheiben $(B_i)_{i \in I}$ überdecken und für jedes $i \in I$ zeigen, dass $f|_{B_i} : B_i \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Also dürfen wir OE annehmen, dass U eine Kreisscheibe ist.

Nach Lemma 3.1.17 ($\rightsquigarrow$ Skript von Soergel) hat f eine Stammfunktion: $\exists\ F \in \mathcal{O}(U) : F' = f$.

Wissen aber: weil F 1x komplex diff'bar ist, ist F unendlich oft komplex diff'bar. Also ist $f \in \mathcal{O}(U)$. $\square$

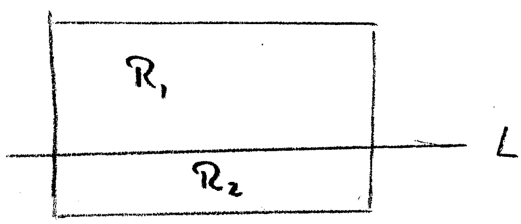
Konsequenz Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade (nicht unbed. durch den Ursprung). Falls $f: U \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_{U \setminus L} \in \mathcal{O}(U \setminus L)$ ist, dann ist $f \in \mathcal{O}(U)$.

Beweis Nach Drehen (d.h. Mult. mit Zahl aus $\mathbb{C}^*$) und Verschieben (d.h. Addition mit Zahl) können wir OE annehmen, dass L die reelle Achse ist. Um zu zeigen, dass f holomorph ist, betrachten wir achsenparallele Rechtecke $R \subset U$.

Wenn R ganz in $U \setminus L$ liegt, ist

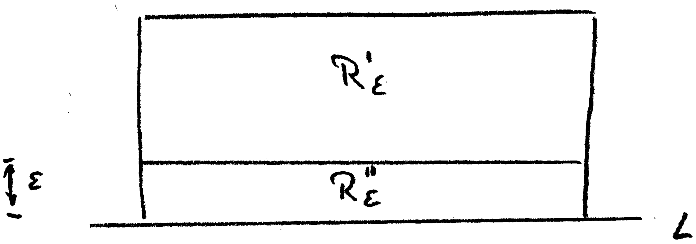
$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

Wenn R die Gerade L schneidet, zerlege R in zwei Rechtecke



Es genügt, das Rechteck R_1 zu betrachten. Gegeben $\varepsilon > 0$ zerlege R_1 weiter

Dann ist



$$\int_{\partial R_1} f(z)\,dz$$

$$= \underbrace{\int_{\partial R'_\varepsilon} f(z)\,dz}_{=0 \text{ weil } R'_\varepsilon \subset U \setminus L} + \underbrace{\int_{\partial R''_\varepsilon} f(z)\,dz}_{\text{geht gegen } 0 \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ weil } f \text{ stetig.}}$$

Also $\int_{\partial R_1} f(z)\,dz = 0$, und analog $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ $\square$

<u>Variante</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $L_1, \dots, L_n$ seien endl. viele Geraden. Falls $f: U \to \mathbb{C}$ stetig ist und $f \in \mathcal{O}(U \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_n))$, dann $f \in \mathcal{O}(U)$.

<u>Beweis</u> Übung. Entferne eine Gerade nach der anderen oder argumentiere induktiv. $\square$

§ 4.2 Potenzreihenentwicklung

Erinnerung / Analysis: Potenzreihen $\sum a_i x^i$ liefern interessante Beispiele für reelle Funktionen. Gegeben irgendeine C^∞-Funktion f, so kann ich f mit der Taylor-Entwicklung vergleichen.

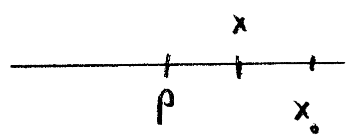
Thema hier: Ich will das jetzt auch für komplexe Potenzreihen $\sum a_i z^i$ (wo $a_i \in \mathbb{C}$, z eine komplexe Variable) und Taylor-Entwicklungen von holomorphen Funktionen.

Erinnerung an elementare Sätze aus Analysis I/II

① Ausdrücke der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-p)^i$ heissen „Potenzreihen mit Entwicklungspunkt p".

② Angenommen, es existiert ein x_0, sodass $\sum a_i (x_0 - p)^i$ konvergiert. Dann gilt für alle x mit

$|x-p| < |x_0 - p|$:



$\sum a_i (x-p)^i$ konvergiert absolut.

Die Zahl

$$r := \sup \{ |x-p| \mid \sum a_i (x-p)^i \text{ konvergiert} \} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

heisst Konvergenzradius.

③ Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-p)^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt: die Folge der Partialsummen P_i konvergiert auf $(p-r, p+r)$ kompakt. Das bedeutet: für jede kompakte Menge $K \subset (p-r, p+r)$ gilt: die Funktionenfolge $P_i|_K : K \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig.

Fakt ohne Beweis (Beweis genau wie in Analysis):
alle Aussagen gelten auch im komplexen

kompl. Zahlen

① Ausdrücke der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$ heissen „kompl. Potenzreihen mit Entwicklungspunkt p".

② Ang. $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: $\sum a_i (z_0 - p)^i$ konvergiert. Dann gilt $\forall z \in B_{|z_0 - p|}(p)$: $\sum a_i (z-p)^i$ konvergiert absolut

Die Zahl

$$r = \sup \{ |z-p| \mid \sum a_i (z-p)^i \text{ konvergiert} \}$$

heisst Konvergenzradius.

③ Es sei $\sum a_i(z-p)^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$. Dann gilt: die Folge der Partialsummen konvergiert auf $B_r(p)$ kompakt.

<u>Bemerkung:</u> genau wie im reellen machen wir <u>keine</u> Aussagen über Konvergenz für Punkte $z \in \partial B_r(p)$!!!