§4 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

§4.1 Cauchy's Integralformel

Satz Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Weiter sei $K \subset U$ eine abg. Kreisscheibe, die ganz in U enthalten ist, und es sei γ ein ~~stetiger~~ Weg, der den Rand von K gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Dann gilt für alle Punkte w aus dem Inneren von K:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

Notation zu diesem Satz

Gegeben $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$, dann

$$B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$

$$\overline{B_r(z_0)} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$$

$$\partial B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}.$$

Ein Weg, der $B_r(z_0)$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft ist $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + \exp(it) \cdot r$

Wir schreiben statt $\int_\gamma \cdots dz$ auch kurz $\int_{\partial B_r(z_0)} \cdots dz$

Beweis: Wir beobachten:

Wenn $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ klein genug ist,

dann $B_\varepsilon(w) \subset K = B_r(z_0)$

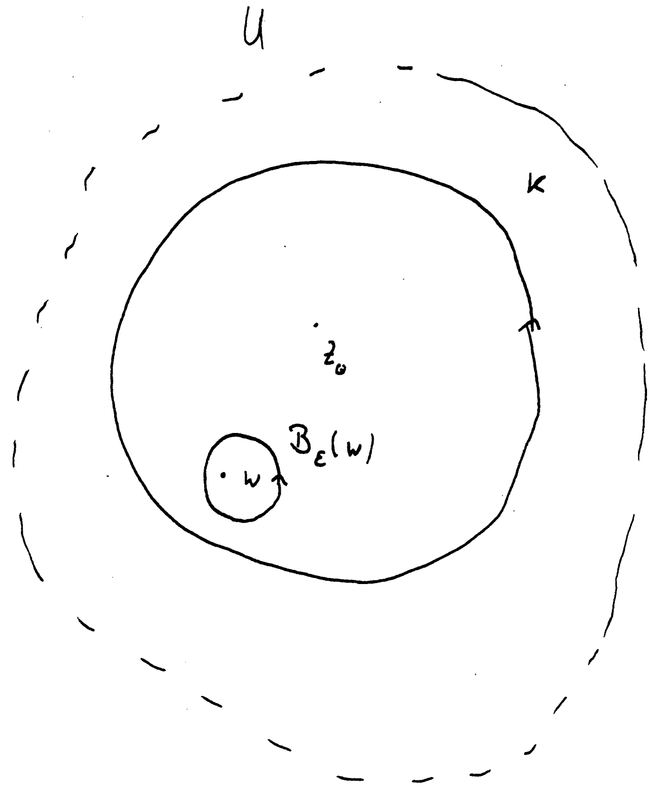
Die Wege rund um K und

um $B_\varepsilon(w)$ sind in der

Menge

Definitionsbereich von $\dfrac{f(z)}{z-w}$

$= U \setminus \{w\}$



frei homotop, also sind die Integrale gleich.

Wir können also OE annehmen: $K = B_\varepsilon(w)$. Das macht die Notation einfacher.

Betrachte die Hilfsfunktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & z \neq w \\[2ex] f'(w) & z = w \end{cases}$$

Diese Funktion ist per Definition auf ganz U stetig. Insbesondere nimmt ~~sie auf $\overline{V}$~~ $|g|$ auf $\overline{K}$ ein Maximum an, sagen wir

$M = \max\{\, |g(z)| \mid z \in \overline{K} \,\}$.

Es ist $\dfrac{f(z)}{z-w} = g(z) + f(w)\dfrac{1}{z-w}$, $\forall z \in U \setminus \{w\}$

Also $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(w)} g(z)\,dz}_{I_{1,\varepsilon}} + \underbrace{f(w)\cdot\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{1}{z-w}\,dz}_{I_{2,\varepsilon}}$

und diese Zahl ist für alle $\varepsilon > 0$ gleich. Es ist aber

$$|I_{1,\varepsilon}| \leq 2\pi\cdot\varepsilon\cdot M \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

$$I_{2,\varepsilon} = f(w)\cdot 2\pi i$$

$\square$

also: $\displaystyle\int_{\partial K} f(z)/_{z-w}\,dz = f(w)\cdot 2\pi i$

Beispielrechnung: Cauchy-Integralformel im einfachsten Fall

Situation: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.

Wir betrachten den konkreten Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, $t \mapsto z_0 + r \cdot \exp(it)$

Dann sagt die Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \cdot \exp(it))}{r \cdot \exp(it)} \cdot ri \exp(it)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot \exp(it))\, dt$$

Diese Aussage ist als Mittelwertsatz bekannt!

Unmittelbare Konsequenz:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r \cdot \exp(it))|\, dt$$

$$\leq \max \{ |f(z)| \mid z \in \partial B_r(z_0) \}$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $|f(z)|$ auf $\partial_r B(z_0)$ konstant ist!

Unmittelbare Konsequenz (schwaches Maximumsprinzip)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, ~~$f \in \mathcal{O}$~~ $f \in \mathcal{O}(U)$, dann hat die stetige Funktion $|f|$ kein echtes Maximum.

Beweis falls bei z_0 ein echtes Maximum vorliegt, dann gibt es $\varepsilon > 0$ sodass $|f(z)| < |f(z_0)|$ ist für alle $z \in \partial B_\varepsilon(z_0)$.

Die stetige Funktion $|f(z)|$ nimmt aber auf $\partial B_\varepsilon(z_0)$ ein Maximum an $\square$

Bemerkung: Es gilt noch mehr, dazu müssen wir aber noch arbeiten.

Satz Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und es sei $z_0 \in U$ ein lokales Maximum der stetigen Funktion $|f|: U \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. Dann ist f in der Nähe von z_0 konstant (d.h. $\exists\ \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(z_0) \subset U$ und $f|_{B_\varepsilon(z_0)} \equiv$ const.).

Erinnerung: Gegeben $a \in \mathbb{C}^*$, dann gibt es Umgebung $V = V(a)$ sodass eine inj. Logaritmus-Funktion $V \to \mathbb{C}$ existiert.

Falls $f(z_0) \neq 0$ ist, dann können wir (ggfs nach Verkleinern von U) annehmen, dass $\log f(z)$ definiert ist auf ganz U.

Beweis Wir wissen: für alle ausreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ist $|f|$ auf ganz $\partial B_\varepsilon(z_0)$ konstant. $\Rightarrow$ $|f|$ ist auf einer ganzen Umgebung von z_0 konstant.

Wenn $f(z_0) = 0$ ist, impliziert das: $f \equiv 0$ auf ganzer Umgebung von z_0.

Wir nehmen also an, $f(z_0) \neq 0$. Nach Verkleinern von U können wir dann annehmen $\log f: U \to \mathbb{C}$ existiert als holomorphe Funktion.

Wegen $|f|$ konstant in der Nähe von z_0 folgt:

$\quad$ Re $\log f$ ist konstant in der Nähe von z_0, $\dfrac{\partial \operatorname{Re}(\log f)}{\partial z} = 0$; $\dfrac{\partial \cdots}{\partial \bar{z}} = 0$

Nach Cauchy-Riemann: Ableitungen des $\operatorname{Im}(\log f)$ müssen ebenfalls verschwinden $\rightsquigarrow$ $\log f$ ist konstant $\rightsquigarrow$ f konstant. $\square$

Beispielrechnung (Cauchy-Integralformel + Ableitung)

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.

Dann gilt $\forall\, w \in B_r(z_0)$ die Gleichung

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f(z_0 + r \cdot e^{it}) \cdot r i e^{it}}{z_0 + r \cdot e^{it} - w}}_{=:\, \varphi(w,t)} dt$$

hier ist $\varphi : B_r(z_0) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(w, t) \longrightarrow \varphi(w,t).$$

Beobachtung: φ ist stetig, für jedes t ist $\varphi(\cdot, t)$ holomorph.

Konsequenz (komplexes Ableiten unter dem Integral)

- f ist komplex diff'bar auf $B_r(z_0)$ [$\leftarrow$ wissen wir schon]

- $$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f(z_0 + r \cdot e^{it}) \cdot r \cdot i \cdot e^{it}}{(z_0 + re^{it} - w)^2}}_{=:\, \varphi'(w,t)} dt$$

<u>Beobachtung</u> φ' ist stetig, für jedes t ist $\varphi'(\cdot, t)$ holomorph.

Konsequenz:

- f' ist komplex diff'bar ...

$\vdots$

- ~~f ist unendlich~~

<u>Satz (Goursat)</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist f unendlich oft komplex diff'bar. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ ist, dann ist $\forall w \in B_r(z_0)$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, dz \qquad \square$$

Konsequenz (Satz von Liouville) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $|f|$ sei beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis Sei $M \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke von $|f|$. Dann ist $\forall r > 0$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-0)^2} \, dz$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{M}{2\pi} 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

Also $f'(0) = 0$. Analog zeigt man $\forall z \in \mathbb{C}$: $f'(z) = 0$. $\square$