Erinnerung: $U \subset \mathbb{C}$ sei offen und $f: U \to \mathbb{C}$ sei stetig.

Wenn $f$ eine Stammfunktion $F: U \to \mathbb{C}$ besitzt, dann gilt für jeden Weg (= stetig diffbar / stückweise stetig diffbar)

$\gamma: [a, b] \to U$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Zusammenfassung: das Wegintegral hängt nur von Start- und Endpunkt ab.

Insbesondere Wenn $\gamma$ geschlossen ist (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$), dann ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beobachtung Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass für jeden geschlossenen Weg $\gamma$ stets $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ ist. Weiter seien

$\gamma_1: [a_1, b_1] \to U$ $\quad$ $\gamma_2: [a_2, b_2] \to U$

zwei Wege, sodass $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) =: z_a$ ist.

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2) =: z_b$$

Dann betrachte den folgenden stetigen, stückweise stetig diff'baren Weg

$$\delta : [0, (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)] \longrightarrow U$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t + a_1) & \text{falls } t < b_1 - a_1 \\ \gamma_2(b_1 + b_2 - a_1 - t) & \text{sonst} \end{cases}$$

(„Mit $\gamma_1$ hin und mit $\gamma_2$ zurück")

Dann

$$0 = \int_\delta f(z)\,dz \qquad \text{weil } \delta \text{ geschlossen}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

<u>Konsequenz:</u> Wegintegral hängt nur von Start- und Endpunkt ab.

**Satz** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Falls das Wegintegral nur von Start- und Endpunkt abhängt, dann existiert eine Stammfunktion

**Beweis** OE sei die offene Menge $U$ zusammenhängend (sonst betrachte die Zusammenhangskomponenten einzeln). Wähle einen Punkt $z_0 \in U$ und betrachte die Funktion

$$F: U \to \mathbb{C} \; ; \qquad z \longmapsto \int_\gamma f(z)\,dz \, ,$$ wo $\gamma$ ein Weg ist, der $z_0$ und $z$ verbindet.

Gegeben einen Punkt $p \in U$, dann müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = f(p)$$ ist.

Dazu wähle erst einmal einen Weg $\delta: [0,1] \to U$

mit $\delta(0) = z_0$, $\delta(1) = p$

Ausserdem betrachte für ausreichend kleine $h$ den Weg

$$\gamma_h : [0,1] \to U \; ; \quad t \mapsto p + t \cdot h$$

Dann ist $F(p) = \int_\delta f(z)\,dz \qquad F(p+h) = \int_\delta f(z)\,dz + \int_{\gamma_h} f(z)\,dz$

Also ist für ausreichend kleines $h$:

$$\frac{F(p+h) - F(h)}{h} = \frac{\int_{\gamma_h} f(z)\, dz}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 f(\gamma_h(t)) \cdot \gamma_h'(t)\, dt$$

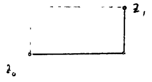
$$= \frac{1}{h} \int_0^1 f(p + t \cdot h) \cdot h\, dt$$

$$= \int_0^1 f(p+th)\, dt \xrightarrow{h \to 0} f(p)$$

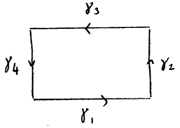
Weil $f$ bei $p$ stetig ist!

Varianten: Rechteckwege

Aus technischen Gründen ist es oft einfacher, nicht beliebige Wege zwischen Punkten $z_0, z_1 \in U$ zu betrachten, sondern nur stückweise achsenparallele Wege folgender Art




statt geschlossener Wege betrachtet man dann Rechteckwege




Notation: Gegeben ein achsenparalleles Rechteck $R \subset U$; dann nenne

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

das „Randintegral" über das Rechteck $R$

<u>Satz</u> Sei $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ die Kreisscheibe und $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig, sodass die Randintegrale über achsen-parallele Rechtecke stets verschwinden. Dann besitzt $f$ eine Stammfunktion.

<u>Bemerkung 1</u> Es gilt sofort „Genau dann besitzt...", denn die Umkehrrichtung ist ja schon bekannt.

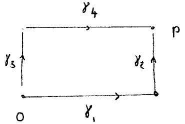
<u>Bemerkung 2</u> Verglichen mit dem letzten Satz zeigen wir dieselbe Folgerung unter schwächeren Voraussetzungen. Also ist der Beweis aufwändiger. Die Grundidee ist aber dieselbe.

<u>Beweis als Bildgeschichte</u>

Gegeben irgendeinen Punkt $p \in U$, dann kann ich den 0-Punkt durch zwei achsenparallele Wege mit $p$ verbinden ($\leadsto$ hier benutze ich: Kreisscheibe).

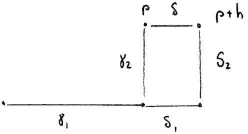
Setze

$$F(p) := \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$




$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$ ... weil Randintegral über Rechteck verschwindet.

Sei jetzt $h$ eine kleine reelle Zahl.




Dann ist

$$F(p+h) = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\delta} f(z)\,dz$$ ... weil Randintegral über Rechteck verschwindet.

Also: $$F(p+h) - F(p) = \int_{\delta} f(z)\,dz = \int_0^1 f(p+t\cdot h)\cdot h\,dz$$

und $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \text{reell}}} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = f(p)$$

Also: $F(x,y)$ ist nach $x$ partiell diff'bar & $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = f(p)$.

Analog: $F(x,y)$ ist nach $y$ partiell diff'bar & $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = i \cdot f(p)$

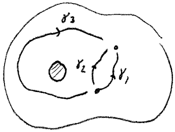
<u>Konsequenz 1</u> Weil $f$ stetig ist, ist $F$ stetig partiell diff'bar, also total diff'bar.

Konsequenz 2 $\quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ also erfüllen partiellen Ableitungen die CR-Differenzialgleichungen

Insgesamt: $F \in \mathcal{O}(U)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = f$. $\square$

## § 3.2 Homotopie von Wegen

Gegeben eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, und Punkte $z_0, z_1 \in U$, so betrachten wir Wege, die $z_0$ und $z_1$ verbinden. Anschaulich ist klar, dass manche dieser Wege ineinander überführt werden können und andere nicht.




**Def** Es sei $U$ ein topologischer Raum, und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zwei stetige Wege

$$\gamma_0 : [a,b] \to U; \quad \gamma_1 : [a,b] \to U \qquad \text{mit } \gamma_0(a) = \gamma_1(a); \; \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

heissen homotop, wenn es stetige Abb.

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$$

gibt so dass

- $\forall\, s \in [0,1] \qquad \Gamma(a,s) = \gamma_0(a); \quad \Gamma(b,s) = \gamma_0(b)$
- $\forall\, t \in [a,b] \qquad \Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

Man kann dann $\gamma_s(t) := \Gamma(t,s)$ als Familie von Wegen auffassen, die stetig zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ interpoliert.

**Def** Situation wie oben. Ein geschlossener Weg heisst zusammenziehbar, wenn er homotop zu einem konstanten Weg ist. Der Raum $U$ heisst „wegweise einfach zusammenhängend", wenn jeder geschlossene Weg zusammenziehbar ist.

**Beispiel 1** $U$ = Kreisscheibe, $\gamma_0 : [a,b] \to U$ ein Weg mit $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = 0$. Dann ist

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U, \quad (t,s) \mapsto (1-t)\cdot\gamma_0(t)$$

eine Homotopie zwischen $\gamma_0$ und dem konst. Weg $\gamma_1 \equiv 0$.

Also ist $\gamma_0$ zusammenziehbar.

**Beispiel 2** $U$ = Kreisscheibe $\gamma_0 : [a,b] \to U$ irgendein geschl. Weg mit $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = z$. Dann ist

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U, \quad (t,s) \mapsto (1-s)\cdot(\gamma_0(t) - z) + z$$

eine Homotopie zwischen $\gamma_0$ und dem konstanten Weg $\gamma_1 \equiv z$.

Also ist die Kreisscheibe 1-zusammenhängend.

<u>Bemerkung:</u> Beispiel 2 verwendet lediglich, dass die Kreisscheibe konvex ist. Jede offene, konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ ist 1-zusammenhängend.

<u>Bemerkung:</u> Es ist gar nicht klar, wie man zeigt, dass eine Menge <u>nicht</u> 1-zusammenhängend ist. Dazu brauchen wir ein Kriterium, das sicherstellt, dass ein Weg <u>nicht</u> zusammenziehbar ist.
Der Integralsatz von Cauchy liefert ein solches Kriterium
(... und noch vieles anderes mehr ...)