Beispiel: Die Fkt. $\frac{1}{i}\exp(iz)$ ist Stammfunktion von $\exp(i \cdot t)$

Also $$\int_0^{2\pi} \exp(it) = \frac{1}{i}\left(\exp(2\pi i) - \exp(2\pi i \cdot 0)\right) = 0.$$

Satz (Substitution): Es sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ nicht-leer & kompakt und $\gamma: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ sei diff'bar. Dann ist

$$\int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(g(s))}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\gamma'(s)}_{\text{Zahl}}\, ds \qquad \square$$

Satz (Ableitung unter dem Integral): Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $(f_t)_{t\in[a,b]}$ eine Familie von holomorphen Funktionen.

Falls die Abb.

$$f: U \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto f_t(z) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}: U \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto \frac{\partial f_t}{\partial z}$$

beide stetig sind, dann ist die Abb.

$$F: U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^b f_t(z)dt$$

holomorph, und $$\frac{\partial F}{\partial z}(z_0) = \int_0^b \frac{\partial f_t}{\partial z}(z_0)dt \qquad \square$$

Satz / Hausaufgabe: Partielle Integration funktioniert so, wie man denkt.

Satz / Hausaufgabe: Partialbruchzerlegung funktioniert so, wie man denkt

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i/2}{x+i} + \frac{-i/2}{x-i}$$

§ 3 Wegintegrale

<u>Situation / Konstruktion</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig diff'barer Weg.

Dann definiere das Wegintegral

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^b \underbrace{f(\gamma(z))}_{\text{kompl. Zahl}} \cdot \underbrace{\gamma'(z)}_{\text{kompl. Zahl}}\,dz$$

mult. von kompl. Zahlen

<u>Beispiel:</u> $U = \mathbb{C}^*$, $f(z) = z^n$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto r\exp(it)$

<u>Dann:</u>

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} [r \cdot \exp(it)]^n \cdot r \cdot i \cdot \exp(it)\,dt$$

$$= i \cdot \int_0^{2\pi} r^{n+1} \cdot \exp((n+1)it)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1. \end{cases}$$

Manchmal ist es günstig, auch stückweise stetig diff'bare Wege zuzulassen:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und sei $\gamma : [a,b] \to U$ stückweise stetig diff'bar. Dann def.

$$\int_\gamma f(z)dz \quad \text{als Summe der Integrale über die}$$

(endl. vielen) stetig diff'baren Teilwege.

<u>Einfaches Faktum</u> Situation wie oben. Sei $\overline{\gamma} : [a,b] \to U$ derselbe Weg wie γ, aber andersherum durchlaufen. Dann ist

$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)dz = - \int_\gamma f(z)dz$$

Prop (Unabhängigkeit von der Parametrisierung) Situation wie oben.

Sei $\delta : [c,d] \to [a,b]$ stetig diff'bar und $\delta(c) = a$, $\delta(d) = b$.

Dann

$$\int_{\gamma \circ \delta} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Beweis Um die Notation zu entwirren, schreibe

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Dann

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_c^d \varphi(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\,ds \qquad \text{Substitutionsregel}$$

$$= \int_c^d f((\gamma \circ \delta)(s)) \cdot \underbrace{\gamma'(\delta(s)) \cdot \delta'(s)}_{= (\gamma \circ \delta)'} \,ds \qquad \text{reell-Kompl. Kettenregel}$$

$$= \int_{\gamma \circ \delta} f(z)\,dz.$$

$\square$

Elementare Aussagen zur Wegintegration

Erinnerung: Die Länge des Weges γ ist $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Damit ist klar,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).$$

§ 3.2 Stammfunktionen

Def Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Eine holom. Funktion $F: U \to \mathbb{C}$ heisst Stammfunktion von f, wenn $F' = f$ ist.

Bemerkung Wir haben zwei Begriffe von Stammfunktionen: einmal für Funktionen auf reellen Intervallen $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$, einmal für Funktionen $\varphi: U \to \mathbb{C}$ auf offenen Mengen von $\mathbb{C}$.

Die Begriffe hängen offenbar zusammen:

Beobachtung Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f: U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion $F: U \to \mathbb{C}$. Weiter sei $\gamma: [a,b] \to U$ stetig diff'bar. Dann ist

$$(F \circ \gamma)' = (F' \circ \gamma) \cdot \gamma' \qquad \text{komplex-reell. Kettenregel}$$

$$= (f \circ \gamma) \cdot \gamma' \qquad \rightsquigarrow F \circ \gamma \text{ ist Stammfunktion auf } [a,b] \text{ von } (f \circ \gamma) \cdot \gamma'$$

Also gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [f \circ \gamma(t)] \cdot \gamma'(t)\,dt = [F \circ \gamma](b) - [F \circ \gamma](a)$$

Konsequenz Wenn eine Stammfunktion existiert, dann hängt das Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ nur vom Start- und Endpunkt des Weges ab, aber nicht vom Weg selbst. Insbesondere: wenn γ ein geschlossener Weg ist (d.h. Startpunkt = Endpunkt), dann ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

<u>Beispiel</u> Für $n \neq -1$ ist $\frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$ eine Stammfunktion von z^n. Also ist für $n \neq -1$ das Integral

$$\int_\gamma z^n \, dz = 0 \quad , \text{ wo } \quad \gamma : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \longmapsto & \exp(it) \end{array}$$

Für $n = -1$ gibt es keine auf ganz $\mathbb{C}^*$ definierte Stammfunktion (... denn das wäre der Logarithmus). Auf manchen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}^*$ aber schon!

<u>Konsequenz:</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' \equiv 0$. Dann ist f lokal konstant.

<u>Erinnerung / Fakten</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann kann ich auf eindt. Weise schreiben

$$U = \dot{\bigcup_{\alpha \in A}} U_\alpha$$

wobei $U_\alpha \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sind.

$\cancel{/\!/\!/}$

Fakt Wenn $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend ist, und wenn $z_1, z_2 \in U$ sind, dann gibt es einen stetig diff'baren Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$.

Beweis der Konsequenz Wir können OE annehmen, dass U zusammenhängend ist. Seien $z_1, z_2 \in U$ und sei $\gamma : [0,1] \to U$ stetig diff'bar mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(0) = z_2$. Dann

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma 0\,dz = 0. \qquad \square$$

~ diskussion: Zusammenhängend $\leftrightarrow$ Wegzusammenhängend.

Vorbereitung Umkehrung:

- $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschl. Wege

$\Rightarrow$ Integral hängt nur von Start- und Endpunkt ab.