Situation Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ sei bei $p \in U$ komplex diff'bar. Schreibe $f(z) = f_1(x,y) + i \cdot f_2(x,y)$.

Proberechnung 1 Dann ist $f = f_1 + i f_2$ bei p partiell diff'bar und es gilt: $\partial f_1 / \partial x = \partial f_2 / \partial y$ $\quad \partial f_2 / \partial x = - \partial f_1 / \partial y$.

Notation Man schreibt $f'(p) = \delta = \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) + i \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)$

Notation („Wirtinger-Kalkül") ~~Man sc~~ Wenn $f = f_1 + i \cdot f_2$ bei p partiell diff'bar ist, dann schreibe

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(- \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)\right)$$

Es gilt also:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$$ f erfüllt am Punkt p die Differentialgleichungen, ist also diffbar.

Falls diese äquivalenten Bed. erfüllt sind, gilt noch

$$f'(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p).$$

<u>Proberrechnung 2</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $p \in U$ ~~o~~ und sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Weiter sei $\delta \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathrm{Mat}(\cancel{n \times n}^{\,2\times 2})$ sei die zu δ gehörende Drehstreckung. Dann

f ist bei p komplex diff'bar mit Ableitung δ

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \delta$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - \delta \cdot h}{h} = 0$$

Folge von kompl. Zahlen ist genau dann Nullfolge, wenn Beträge gegen 0 konvergieren. Beide Folgen haben dieselben Beträge.

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - \delta \cdot h}{|h|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - A \cdot h}{|h|} = 0$$

$\Leftrightarrow$ f ist bei p total differenzierbar mit Ableitungsmatrix A.

Konsequenz Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

TFAE

1) f holomorph.

2) f überall total diff'bar & $\underbrace{\text{CR-Gleichungen gelten}}$

$\Leftrightarrow$ Ableitungsmatrizen sind Drehstreckungen

$\Leftrightarrow$ $\partial f / \partial \bar{z} = 0$

$\square$

Notation Die Menge der holomorphen Funktionen wird mit

$\mathcal{O}(U)$ bezeichnet.

Fingerfertigkeit beim Ableiten

Seien $V \subset \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen, und sei $\gamma : V \to U$ (total) diff'bar. Dann ist $\forall\, t \in V$: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$,

kann also als kompl. Zahl aufgefasst werden. Jetzt sei $f \in \mathcal{O}(U)$.

Ich interessiere mich für die Ableitung von $f \circ \gamma : V \longrightarrow \mathbb{C}$.

Nach der Kettenregel für total diff'bare Funktionen ist

$$(f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{\mathrm{Jac}(f)\big|_{\gamma(t)}}_{\substack{2\times 2\text{-Matrix} \\ = \text{Drehstreckung zu } f'(\gamma(t))}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{Vektor}}$$

$$= \underbrace{f'(\gamma(t))}_{\text{kompl. Zahl}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{kompl. Zahl}}$$

mult. von kompl. Zahlen.

„Reell-komplexe Kettenregel"

§ 2.3 Beispiele von holomorphen Funktionen

Direktes Nachrechnen / Summen- und Produktregel

- Alle Polynome sind holomorph: $\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Direktes Nachrechnen / Summen-, Produkt- und Quotientenregel

- Alle rationalen Funktionen sind holomorph: ~~$\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$~~

Direktes Nachrechnen

- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*; \quad x+iy \mapsto e^x \cdot \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$ ist holomorph.

  mit $\exp' = \exp$. $\qquad \exp \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

  Also sind sin & cos holomorph.

Direktes Nachrechnen / Kettenregel

- Verkettungen von holomorphen Funktionen sind holomorph

$$\exp(2z + 4z^7) \cdot \sin(z^8) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Kettenregel:

Proposition Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

1) f ist injektiv.

2) $\forall\, p \in U: \quad f'(p) \neq 0$.

Dann ist $V := f(U) \subset \mathbb{C}$ offen und $f^{-1}: V \to U$ ist wieder holomorph.

Beweis Wir wissen aus Analysis II: $V := f(U)$ ist offen und $f^{-1}: V \to U$ ist total diff'bar. Genauer: Wenn $q \in V$ ist mit Urbildpunkt $p \in U$, dann ist

Ableitungsmatrix von f^{-1} bei q

$$= \big(\underbrace{\text{Ableitungsmatrix von } f \text{ bei } p}_{A}\big)^{-1}$$

Klar, f per Annahme: A ist Drehstreckung, Faktor $\neq 0$.

Also ist auch A^{-1} eine Drehstreckung $\Rightarrow f^{-1}$ erfüllt bei q die CR-Gleichungen. $\square$

Konkrete Beispiele

A) $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ = „Obere Halbebene"

$f: U \longrightarrow \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) \leq 0 \} \subset \mathbb{C}$

$z \mapsto z^2$

Also gibt es eine holomorphe Wurzelfunktion

sqrt: geschlitzte Ebene $\longrightarrow U$

B) Ditto mit Logarithmus, falls U geeignet klein ist.

Erinnerung:

$$\log z = \log |z| + i \cdot \underbrace{\arg(z)}_{\operatorname{atan} \operatorname{Re}(z)/\operatorname{Im}(z)}$$

... sieht schrecklich aus, ist aber gar nicht so schlimm, denn

$\forall z \in U : z = \log(\exp(z))$

$\Rightarrow \forall z \in U: 1 = \log'(\exp(z)) \cdot \exp'(z)$ Kettenregel

$\Rightarrow \forall z \in U. \log'(\exp(z)) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

$\Rightarrow \forall z \in V: \log'(z) = \dfrac{1}{z}$

§2.4 Integration über reelle Intervalle

<u>Vereinbarung</u> In diesem Abschnitt ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stets ein nicht leeres, kompaktes Intervall.

<u>Def</u> Gegeben eine stetige Abb. $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dann definiere $\int_a^b f(t)\,dt$ durch komponentenweise Integration.

<u>Def'</u> Gegeben einen endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum und stetige Abb. $f: [a,b] \to V$, dann wähle Basis um V mit $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren, verwende Def. und rechne nach dass das Ergebnis nicht von der Wahl der Basis abhängt.

<u>Proposition</u> Sei V ein endl.-dimensionaler Vektorraum $/\mathbb{R}$ und sei $f: [a,b] \to V$ stetig.

① $\forall\, c \in (a,b): \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

② Wenn W endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und $\phi: V \to W$ linear, dann

$$\int_a^b (\phi \circ f)\,dt = \phi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

③ $f \equiv \vec{v}$ konstant $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\cdot\vec{v}$.

④ Für jede Norm auf V: $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$ $\square$

__Beispiel__

$$\int_0^{2\pi} \exp(i \cdot t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt \\ \int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{C}.$$

__Def__ Sei $f : [a,b] \to V$ stetig. Eine Abb. $F : [a,b] \to V$ heisst Stammfunktion von f, falls F diff'bar ist und $F' = f$.

(diff'bar bedeutet hier total diff'bar. Die Ableitungsmatrix ist ein Vektor)

__Satz (Hauptsatz)__ Sei $f : [a,b] \to V$ stetig. Dann ist

$$F : [a,b] \to V, \quad t \mapsto \int_a^t f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion $\square$

__Satz__ Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante $\square$

__Satz__ Sei $f : [a,b] \to V$ stetig und F eine Stammfunktion.

Dann ist $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. $\square$