§ 1.2 Die Exponentialfunktion

Folgen in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und Grenzwerte haben wir in der VL Analysis ausführlich betrachtet: eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$z_n = x_n + i \cdot y_n$ konvergiert genau dann (absolut), wenn

die Folge x_n der Realteile <u>und</u>

die Folge y_n der Imaginärteile

jeweils einzeln konvergieren. / absolut konvergieren.

Analog für Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$.

Der Begriff der Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist der Begriff der Stetigkeit für Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

<u>Wichtigstes Beispiel</u> Für jede kompl. Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ absolut.

– beachte: $|\operatorname{Re} z^k| \leq |z^k| = |z|^k$ und

$|\operatorname{Im} z^k| \leq |z^k| = |z|^k$

und verwende dieselbe Argumentation wie in Analysis I / II.

(Alternativ: Majorantenkriterium mit Reihe $\sum \frac{1}{k!} |z|^k$.)

Beobachtung: Für alle reellen Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$\exp(-i\alpha) = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha) = \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha) = \overline{\exp(i\alpha)}$$

es ergibt sich

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)\right) \qquad (A)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)\right) \qquad (B)$$

Die rechten Seiten von (A) und (B) machen nicht nur für reelle Zahlen α Sinn, sondern sind für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert. Wir definieren auf diese Weise Abb.

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tfrac{1}{2}\left(\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)\right)$$

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tfrac{1}{2i}\left(\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)\right).$$

die für reelle Argumente mit den bekannten Funktionen übereinstimmen.

Gehen wir in die Vorlesung Analysis rechnet man folgende Fakten nach

1) $\forall\, z \in \mathbb{C}: \quad \sum \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

2) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \sum \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \left(\sum \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum \frac{z_2^k}{k!}\right)$

Wir schreiben $\exp(z) = \sum \frac{z^k}{k!}$

<u>Fakt (2) kann ich auch anders ausdrücken</u>

a) klar, dass $\exp(0) = 1$.

b) Die Abb. exp nimmt nur Werte in $\mathbb{C}^*$ an, denn wäre $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$, dann $\underbrace{\exp(0)}_{=1} = \exp(z - z) = \underbrace{\exp(z)}_{=0} \cdot \exp(-z) = 0$

<u>In der Summe sehen wir:</u> Die Abb.

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ist ein Gruppenmorphismus. ↯ zwischen $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot)$!

Geometrische Bedeutung von exp

Nicht ganz klar. Wir machen ein paar Probe-Rechnungen.

Proberechnung 1 Wenn $x \in \mathbb{R}$ ist, dann ist $\exp(x)$ die bekannte exp-Funktion aus Analysis 1.

Proberechnung 2 Wenn $y \in \mathbb{R}$ ist, dann ist

$$\exp(i\,y) = \sum \frac{(i\cdot y)^k}{k!} = \sum \frac{i^k\, y^k}{k!}$$

Sehr interessant. Es ist

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \equiv 0 \mod 4 \\ i & \text{falls } k \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \text{falls } k \equiv 2 \mod 4 \\ -i & k \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$\exp(iy) = \underset{0}{\begin{pmatrix} \frac{1}{0!} \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y}{1!} \end{pmatrix}} + \underset{2}{\begin{pmatrix} -\frac{y^2}{2!} \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{3}{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{y^3}{3!} \end{pmatrix}} + \underset{4}{\begin{pmatrix} \frac{y^4}{4!} \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y^5}{5!} \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} = (\cos y) + i(\sin y)$$

Insgesamt gilt damit für ~~eine~~ jede beliebige komplexe Zahl $z = x + iy$.

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \underbrace{\exp(x)}_{\text{reell, keine Überraschung}} \cdot \exp(iy) = \underbrace{\exp(x)\cdot(\cos y + i \sin y)}_{\text{Zahl mit Betrag } \exp(x) \text{ und Argument } = y.}$$

<u>Konsequenz</u>

1) Die Abb. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist surjektiv (gib mir eine Zahl z, dann $z = \exp(\log|z| + i \cdot \arg(z))$)

2) Die Abb. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist <u>nicht</u> injektiv. Genauer:

$$\forall z : \forall n \in \mathbb{Z} : \quad \exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$$

3) Wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben sind mit $\exp(z_1) = \exp(z_2)$,

dann $\exists\, n \in \mathbb{Z} : \quad z_1 - z_2 \in (2\pi i) \cdot n$

(anders formuliert: $z_1 - z_2 \in (2\pi i) \cdot \mathbb{Z}$)

<u>Schöner formuliert:</u> Der Kern des Gruppenmorphismus

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ist die Untergruppe $(2\pi i) \cdot \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{C}$

Aber Achtung! Genau wie bei der Quadratwurzel gilt:

Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat einen Logarithmus (d.h. Zahl w $\exp(w) = z$), aber es gibt keine stetige Logarithmusfunktion $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

Notation Manchmal findet man in der Literatur den „Hauptzweig des Logarithmus", die nicht stetige Funktion

$$\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow \begin{pmatrix} \ln |z| \\ \arg z \end{pmatrix}$$

§ 2 Differenzierbarkeit

§ 2.1 Holomorphe Funktionen

<u>Erinnerung:</u> Es sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $p \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist bei p diff'bar mit Ableitung $\delta \in \mathbb{R}$,

wenn
$$\underbrace{\lim_{h \to 0}} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \delta \quad \text{ist.}$$

bedeutet: für alle Nullfolgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \neq 0$, $p+h_n \in U$ existiert limes und ist gleich δ.

<u>Erinnerung</u> Diff'bar $\Rightarrow$ Stetig.

Es gelten Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, ...

<u>Definition</u> Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $p \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist bei p ~~diff'bar~~ komplex diff'bar mit Ableitung $\delta \in \mathbb{C}$, wenn
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \delta \quad \text{ist.}$$

<u>Beweis genau wie Analysis I</u> komplex Diff'bar $\Rightarrow$ Stetig.

Es gelten Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, ...

<u>Def</u> Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Nenne f „holomorph", wenn f an jedem Punkt diff'bar ist. Die Ableitung wird mit f' bezeichnet.

§ 2.2 Komplexe Diff'barkeit und Diff'barkeit

Frage: Ist komplexe Diff'barkeit ein neuer Begriff? Gibt es einen Unterschied zur Diff'barkeit von Abb. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$?

Erinnerung: Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p \in U$. Eine Abb. $f: U \to \mathbb{R}^2$ heisst bei p total diff'bar mit Ableitungsmatrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - A \cdot h}{|h|} = 0$$

das bedeutet: für alle Nullfolgen (h_n) aus $\mathbb{R}^2$ mit ...

Falls f bei p diff'bar ist, dann wissen wir auch genau, wie die Matrix A aussieht: schreibe

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Dann

$$A = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x\,(p) & \partial f_1/\partial y\,(p) \\ \partial f_2/\partial x\,(p) & \partial f_2/\partial y\,(p) \end{pmatrix}$$

<u>Proberechnung</u> Es sei $f: U \to \mathbb{C}$ bei p komplex diff'bar.

mit Ableitung $\delta = d_1 + i \cdot d_2$.

Schreibe $f(x+iy) = \underbrace{f_1(x,y) + i \cdot f_2(x,y)}$

reellwertige Funktionen

Jetzt ist
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \delta = d_1 + i \cdot d_2$$

Insbesondere gilt für jede reelle Folge $h_n \to 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \cancel{f_1(p_x + h_n, p_y) + i f_2(p_x, p_y)} \quad \frac{f(p+h_n) - f(p)}{h_n}$$

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{f_1(p_x+h_n, p_y) + i f_2(p_x+h_n, p_y) - f_1(p_x, p_y) - i f_2(p_x, p_y)}{h_n}} = d_1 + i d_2$$

$$= \partial f_1/\partial x \,(p_x, p_y) + i\, \partial f_2/\partial x \,(p_x, p_y)$$

<u>Wir sehen:</u> $\partial f_1/\partial x = d_1$ $\quad \partial f_2/\partial x = d_2$.

Auf der anderen Seite gilt für jede reelle Folge $h_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(p+i\cdot h_n) - f(p)}{i\cdot h_n} = \lim (-i) \frac{f(p+ih_n) - f(p)}{h_n}$$

$$= \lim \frac{f_1(p_x, p_y+h_n) + i f_2(p_x, p_y+h_n) - f_1(p_x,p_y) - i\cdot f_2(p_x,p_y)}{h_n} (-i)$$

$$= \left[\partial f_1/\partial y \,(p_x,p_y) + i\, \partial f_2/\partial y \,(p_x,p_y) \right] (-i)$$

$$= + \partial f_2/\partial y - i\cdot \partial f_1/\partial y \overset{!}{=} d_1 + i\cdot d_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\partial f_2/\partial y = d_1 = \partial f_1/\partial x}} \; ; \; \underline{\underline{-\partial f_1/\partial y = d_2 = \partial f_2/\partial x}}$$

<u>Merke:</u> Wenn f bei p komplex diff'bar ist, dann sind die partiellen Ableitungen nicht beliebig, sondern erfüllen Gleichungen, genannt „Cauchy-Riemann partielle Differentialgleichung".