§ 1 Erinnerung & Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

<u>Konstruktion</u> Wir def. auf $\mathbb{R}^2$ zwei Operationen

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

<u>Nachrechnen</u> $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper, den wir als $\mathbb{C}$ bezeichnen.

$$0_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Wie üblich: } \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus 0_{\mathbb{C}}$$

<u>Nachrechnen</u> Die injektive Abb. $i: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Körpermorphismus

$$i(x_1 + x_2) = i(x_1) + i(x_2) \; ; \; i(x_1 \cdot x_2) = i(x_1) \cdot i(x_2) \; ; \; i(x^{-1}) = i(x)^{-1}$$

<u>Notation</u> Die Abb. i erlaubt $\mathbb{R}$ mit der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren. Man bez. die x-Achse als „reelle Achse", die y-Achse als „imaginäre Achse"

Die Identifikation erlaubt, Elt. von $\mathbb{R}$ als kompl. Zahlen aufzufassen, wir schreiben

$$\underset{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\pi}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Notation: Das Elt $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ wird mit i bezeichnet. Statt $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = z$ schreiben wir meist $x + iy$.

Beachte: $i^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1$

Notation: Sei $z = x + iy$, dann nenne x den „Realteil von z", y den „Imaginärteil von z". Schreibe $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Beobachtung: Die Abb. $\mathcal{K}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ („Spiegelung an der reellen Achse") ist ein Körpermorphismus.

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\mathcal{K}(z_1 + z_2) = \mathcal{K}(z_1) + \mathcal{K}(z_2)$, $\mathcal{K}(z_1 \cdot z_2) = \mathcal{K}(z_1) \cdot \mathcal{K}(z_2)$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$: $\mathcal{K}(z^{-1}) = \mathcal{K}(z)^{-1}$

Es gilt: $\mathcal{K}(z) = z \iff z \in \mathbb{R}$.

Die Abb. wird als Konjugation bezeichnet. Die Schreibweise $\bar{z} := \mathcal{K}(z)$ ist üblich.

Easy: $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Notation Die Euklidische Norm auf $\mathbb{C}$ wird mit $|\cdot|$ bezeichnet

Nachrechnen $\forall z \in \mathbb{C},\ z = x+iy$: $|z| = x^2+y^2 = z \cdot \bar{z}$

Erinnerung Es gilt die Δ-Ungleichung $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Mithilfe des Betrages können wir das Inverse sehr leicht ausrechnen

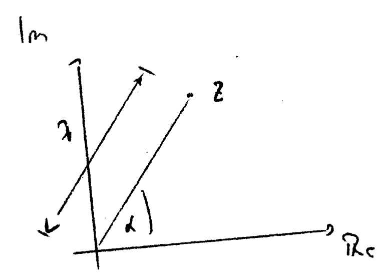
Für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$

Insbes. ist für alle z mit $|z|=1$, $z^{-1} = \bar{z}$.

Weitere Konsequenz. $|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2}$ ...

Geom. Bedeutung der Addition klar, das ist die Vektorraum-Addition des $\mathbb{R}^2$.

Geom. Bedeutung der Mult Spannender!



Vorüberlegung Wir können eine kompl. Zahl z durch Winkel $\alpha \in [0\ 2\pi)$ und Betrag λ beschreiben

$$z = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix};$$

Schreibweise $\alpha = \arg(z)$ „Argument".

Die Abb. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Mult. von kompl. Zahlen

schreibt sich in Koordinaten so

$$z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)\cdot y \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \cos & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor Produkt in $\mathbb{R}^2$

Drehmatrix; Drehung um Winkel α.

Mult. mit z bedeutet also

- Um Faktor $|z|$ strecken
- Um Winkel $\arg(z)$ drehen

<u>Merke</u> Man mult. zwei kompl. Zahlen, indem man Beträge multipliziert und Argumente (= Winkel) addiert!

Geometrische Bedeutung der Inversen   Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Dann ist klar

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{|z|}{|z|^2} \quad ; \quad \arg(z^{-1}) = -\arg(z).$$

Damit ist die Inverse eindeutig festgelegt. Aber was bedeutet das anschaulich?

Erinnerung 1   Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ negiert das Argument, lässt Betrag unverändert.

Erinnerung 2   Spiegelung am Einheitskreis; $s: z \mapsto z/|z|^2 = z/(z \cdot \bar{z})$

- lässt Argument unverändert
- invertiert den Betrag

Es ist $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} =$ ~~Spiegelung~~ $s(\bar{z}) = \overline{s(z)}$

Also: man invertiert eine kompl. Zahl durch Spiegelung am Einheitskreis + Konjugation.

Geom. Bedeutung des Quadrierens

Damit ist klar, was die Abb. $z \mapsto z^2$ macht

1) Betrag wird Quadriert.

2) Argument wird verdoppelt.

Umgekehrt. Gegeben eine Zahl z mit Betrag λ und Arg. α,

dann sei w die Zahl mit Betrag $\sqrt{\lambda}$ und Argument $= \alpha/2$

Dann ist $w^2 = z$!

Also hat jede komplexe Zahl eine Wurzel!

Aber die Wurzel ist nicht eindeutig, denn $-w$ ist ebenfalls eine Wurzel

(Beob. $-w$ ist die Zahl mit Betrag $\sqrt[2]{\lambda}$ und Argument $\alpha/2 + \frac{2\pi}{2}$

Können sie das für Kubikwurzeln verallgemeinern?)

Beob. Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat also genau 2 Quadratwurzeln

Die Abb. $\begin{matrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to z^2 \end{matrix}$ ist also surjektiv, aber nicht injektiv

(Jedes Elt. in $\mathbb{C}^*$ hat zwei Urbilder, nur 0 hat ein einziges Urbild).

Aber Achtung! Es gibt keine stetige Wurzelfunktion!

Angenommen, wir hätten stetige Fkt

$$w : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \text{sodass} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* : \quad w(z)^2 = z$$

Dann gilt $\forall z \in \mathbb{C}^* : \quad w(z^2)^2 = z^2$

also untersch. sich $w(z^2)$ und z nur ~~aa~~ um Vorzeichen.

Konseq. die stetige Fkt. $f : z \mapsto \dfrac{w(z^2)}{z}$ nimmt als Werte nur ± 1

ist also konstant!

Aber $f(-z) = -f(z)$!!! $\square$